2A La résolution de modèles linéaires par Excel

Nous reprenons ici, de façon plus détaillée, la sous-section où est indiqué comment utiliser le solveur d'Excel 2010 pour résoudre un modèle linéaire (voir pages 30 et 31). Nous procéderons en trois étapes et illustrerons notre propos avec le problème des chaises de M. Eugène dans sa version sans cuisson.

2A.1 Saisie des données numériques

Il s'agit d'entrer les coefficients de la fonction-objectif et des contraintes technologiques. Pour faciliter l'interprétation des fichiers, nous convenons de placer ces nombres en tableau, les variables de décision étant associées aux colonnes et les contraintes technologiques, aux lignes. La figure 1 donne la présentation que nous avons retenue pour les données numériques du modèle linéaire de la page 28 du manuel. Les lignes 1 à 9 servent seulement à documenter le fichier et ne seront pas utilisées par le solveur d'Excel (les dimensions *m* et *n* représentent, la 1re, le nombre de contraintes technologiques du modèle, la 2e, le nombre de variables de décision). Le rôle des lignes 21 et 23, de même que celui de la colonne D, seront expliqués à l'article 2A.2 ci-après.

FIGURE 1. Les données numériques du modèle

	A	B	C	D	E	F
1	**2.1.1 Les chaises de M. Eugène (sans cuisson)**					
2						
3	**Problème de maximisation**					
4						
5	**Dimensions *m* et *n***	7	2			
6						
7						
8	**Noms des variables**	x_A	x_B	M.G.	Signe	Const.
9						
10	**Coefficients c_j et valeur de z**	450	800			
11						
12	**Contraintes technologiques**					
13	Commande A	1	0		>=	42
14	Commande B	0	1		>=	53
15	Demande A	1	0		<=	100
16	Demande B	0	1		<=	100
17	Disp. Brasage	1,5	2		<=	250
18	Disp. Laquage	0,5	0,75		<=	100
19	Disp. Capitonnage	2	3		<=	327
20						
21	**Types des variables (*a priori* ≥ 0)**	Ent	Ent			
22						
23	**Valeurs des variables x_j**					

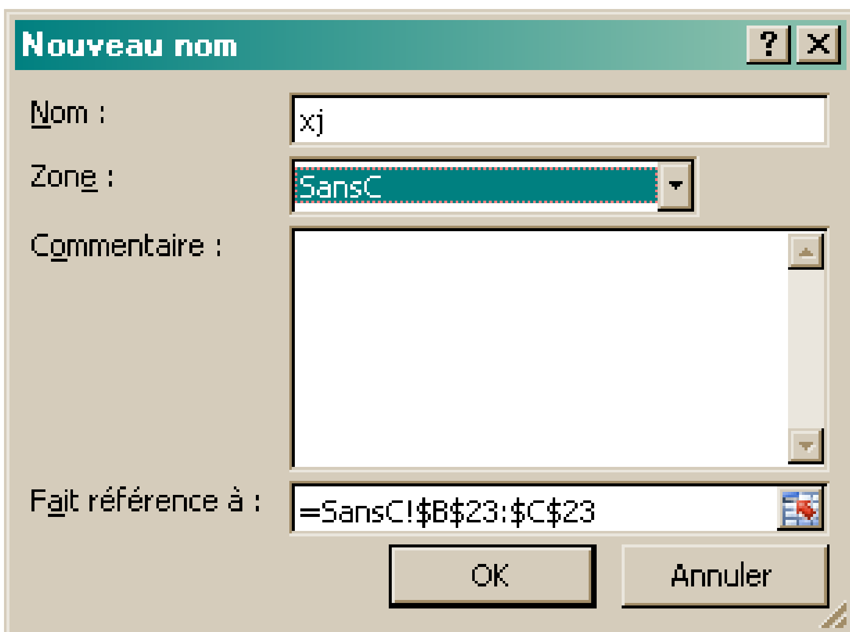
2A.2 La structure du modèle linéaire

La colonne D de la figure 1 contiendra la valeur *z* de la fonction-objectif et les membres gauches des différentes contraintes technologiques. Dans la figure 2.1 du manuel (voir page 30), les valeurs de la cellule D10 et celles de la plage D13:D19 sont calculées à l'aide d'une même formule qui fait appel à la plage B$23:C$23 contenant les valeurs des variables de décision. Il est commode de donner un nom à cette dernière plage et de recourir dans les formules au nom de la plage plutôt qu'à son adresse. Voici comment procéder pour attribuer le nom xj à la plage des variables de décision.

- Sélectionner la plage B23:C23.
- Cliquer sur le menu Formules, puis sur la commande Définir un nom et enfin sur l'option Définir un nom…
- Une boîte de dialogue s'ouvre (voir la figure 2 ci-dessous). Entrer « xj » dans la zone du haut, sélectionner la feuille SansC dans le menu déroulant, puis cliquer sur OK.

On répétera ces opérations pour nommer cj la plage B10:C10 des coefficients de la fonction-objectif, et *z* la plage réduite à la seule cellule D10 qui contient la valeur de la fonction-objectif.

FIGURE 2. Nommer une plage



Par défaut, la zone où s'applique le nom attribué à une plage est l'ensemble du fichier. Mais, ici, nous avons choisi de limiter le nom xj à la feuille SansC. En effet, le fichier Chaises.xlsx contient les versions informatisées de quatre modèles linéaires dans autant de feuilles et nous désirions prendre les mêmes noms xj, z et cj dans les quatre cas; sélectionner l'option Classeur dans le menu déroulant aurait exigé de recourir à des noms différents.

La figure 3 indique comment nous avons calculé la valeur z de la fonction-objectif et les membres gauches des contraintes technologiques.

- La formule « =SOMMEPROD(cj;xj) » reportée dans la cellule D10 signifie que la valeur de cette cellule sera égale à

$$c_1\, x_1 + c_2\, x_2$$

  où c_j (resp. x_j) est la valeur de la cellule numéro j de la plage nommée cj (resp. xj). Ici, $c_1 = 450$ et $c_1 = 800$. La formule de D10 est donc une traduction informatique de la fonction-objectif du modèle, qui, rappelons-le, s'écrit : $z = 450\, x_1 + 800\, x_2$. Pour l'instant, les cellules de la plage xj sont vides et Excel fait comme si elles contenaient la valeur 0.

FIGURE 3 Le modèle linéaire complété

	A	B	C	D	E	F
1	**2.1.1 Les chaises de M. Eugène (sans cuisson)**					
2						
3	**Problème de maximisation**					
4						
5	**Dimensions *m* et *n***	7	2			
6						
7						
8	**Noms des variables**	x_A	x_B	M.G.	Signe	Const.
9						
10	**Coefficients c_j et valeur de z**	450	800	0		
11						
12	**Contraintes technologiques**					
13	Commande A	1	0	0	>=	42
14	Commande B	0	1	0	>=	53
15	Demande A	1	0	0	<=	100
16	Demande B	0	1	0	<=	100
17	Disp. Brasage	1,5	2	0	<=	250
18	Disp. Laquage	0,5	0,75	0	<=	100
19	Disp. Capitonnage	2	3	0	<=	327
20						
21	**Types des variables (*a priori* ≥ 0)**	Ent	Ent			
22						
23	**Valeurs des variables x_j**					

Fichier : Chaises.xlsx Feuille : Fig1

Cellule	Formule	Copiée dans
D10	=SOMMEPROD(cj;xj)	------------
D13	=SOMMEPROD(B13:C13;xj)	D14: D19

- De même, la formule « =SOMMEPROD(B13:C13;xj) » de la cellule D13 définit le membre gauche de la 1re contrainte technologique comme la somme $1\, x_1 + 0\, x_2$; ainsi, le membre gauche de la contrainte « Commande A » est égal à x_1.
- La formule de D13 est copiée dans les autres cellules de la plage D14:D19. Par exemple, le membre gauche de « Disp. Capitonnage » est égal à $2\, x_1 + 3\, x_2$.

2A.3 Le solveur d'Excel

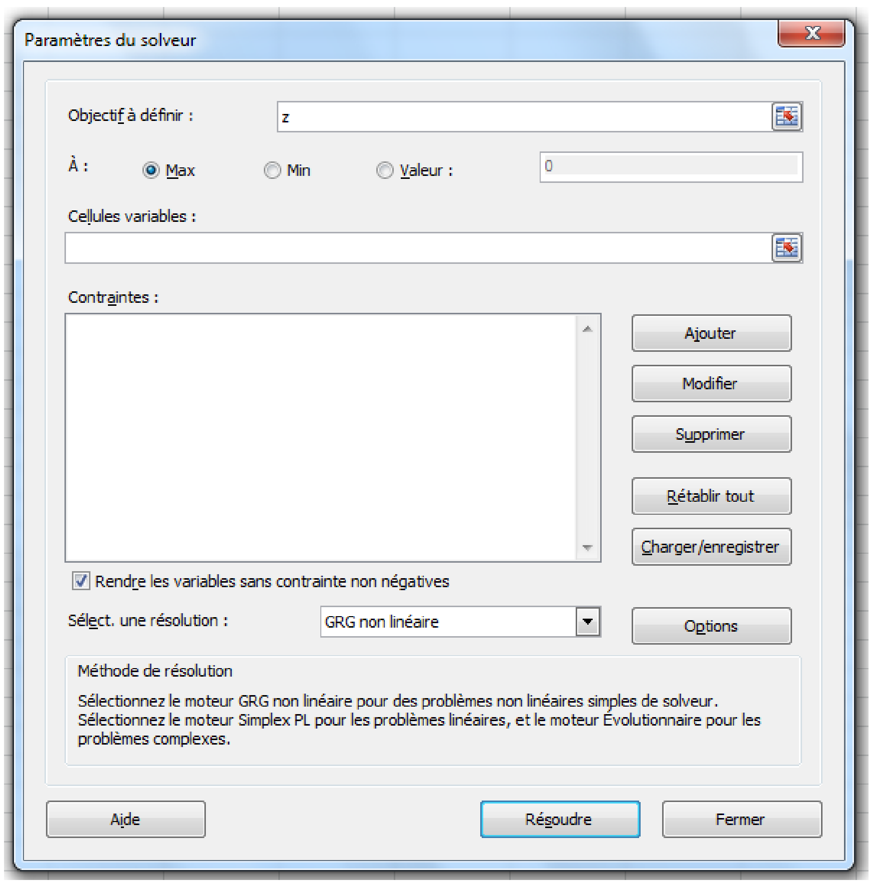
Les paramètres du solveur

Il faut d'abord communiquer au solveur d'Excel la structure du modèle linéaire. Voici comment procéder. Placer le curseur dans la cellule D10 où se trouve la valeur courante *z* de la fonction-objectif; cliquer sur le menu Données d'Excel, puis sur l'option Solveur. La boîte de dialogue « Paramètres du solveur » s'ouvre alors (voir la figure 4 ci-dessous). Cette boîte permet de fournir au solveur les cinq éléments d'information suivants.

1. La cellule contenant le paramètre à maximiser ou à minimiser : la zone de texte Objectif à définir: contient déjà le nom **z** qui réfère à la cellule D10 où se trouve la formule définissant la fonction-objectif *z*, car le curseur a été placé à cet endroit (si le curseur était ailleurs, il suffirait d'entrer l'adresse ou le nom de la cellule).
2. Le sens de l'optimisation : l'objectif du modèle considéré consistant à maximiser *z*, il n'est pas nécessaire de modifier la case Max cochée par défaut.
3. La plage des variables de décision : dans la zone Cellules variables:, entrer le nom xj correspondant à l'adresse de la plage B23:C23 associée aux variables de décision.
4. Les contraintes technologiques et d'intégrité : il faut compléter la zone Contraintes: de la façon indiquée ci-après.
5. Le type d'algorithme de résolution.

FIGURE 4. La boîte de dialogue « Paramètres du solveur » à l'ouverture

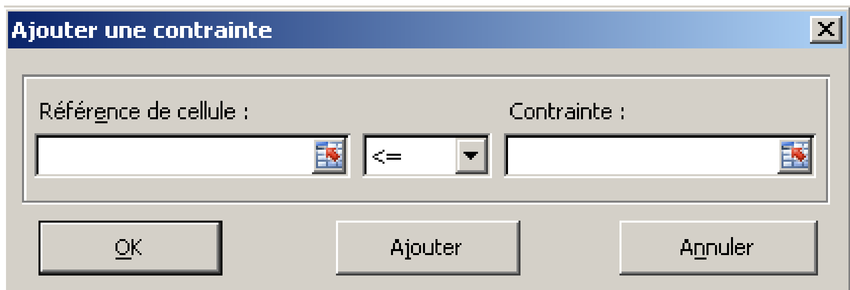
1.
2.
3.
4.
5.



Il reste à décrire les diverses contraintes du modèle et à choisir l'algorithme de résolution. Commençons par ce dernier. Cliquer sur le menu de la zone Sélect. Une résolution:. Le solveur offre alors trois choix : GRC non linéaire, Simplex PL et Évolutionnaire. Cliquer sur la seconde option.

Venons-en aux contraintes. Cliquer d'abord sur le bouton Ajouter à droite de la zone Contraintes:. La boîte de dialogue affichée devrait ressembler à celle de la figure 5.

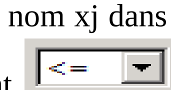
FIGURE 5. La boîte de dialogue « *Ajouter une contrainte* »



Convenons de regrouper en trois catégories les contraintes du modèle linéaire de la page 28 du manuel : les inéquations (1) et (2) de signe $\geq$, les inéquations (3) à (7) de signe $\leq$ et les contraintes d'intégrité (9). Chaque groupe sera ajouté en bloc au solveur. (Les contraintes (8) de non-négativité seront automatiquement prises en compte par le solveur, car la case «Rendre les variables sans contrainte non négatives» est cochée par défaut.) Nous indiquons d'abord comment entrer les inéquations (1) et (2), nommées « *Commande A* » et « *Commande B* » dans le fichier.

- Placer le curseur dans la zone de texte Référence de cellule:, puis sélectionner la plage D13:D14 (il s'agit, rappelons-le, des adresses des membres gauches des contraintes de commandes).
- Ouvrir le menu déroulant 

 et sélectionner $\geq$, le signe commun des inéquations « *Commande A* » et « *Commande B* ».
- Placer le curseur dans la zone de texte Contrainte:, puis sélectionner la plage F13:F14, (celle-ci contient les membres droits des contraintes de commandes).
- La boîte de dialogue devrait ressembler à celle de la figure 6a (voir page suivante). Cliquer sur le bouton Ajouter.

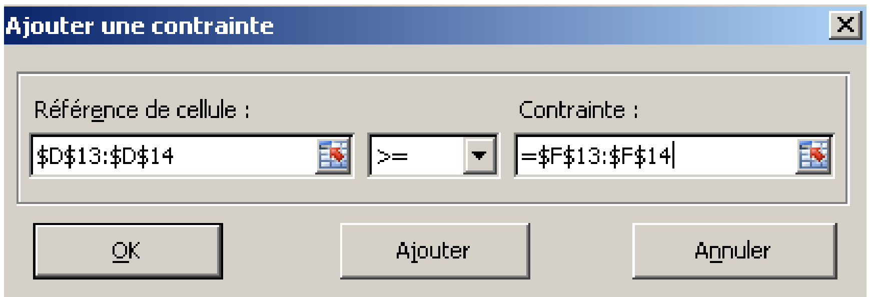
Répéter ces étapes pour spécifier le groupe des cinq contraintes de signe $\leq$ (voir la figure 6b). Pour les contraintes d'intégrité, cliquer sur le bouton Ajouter et entrer le nom xj dans la zone de texte Référence de cellule:; choisir l'option ent dans le menu déroulant 

. La boîte de dialogue devrait ressembler à celle de la figure 6c. Cliquer sur OK.

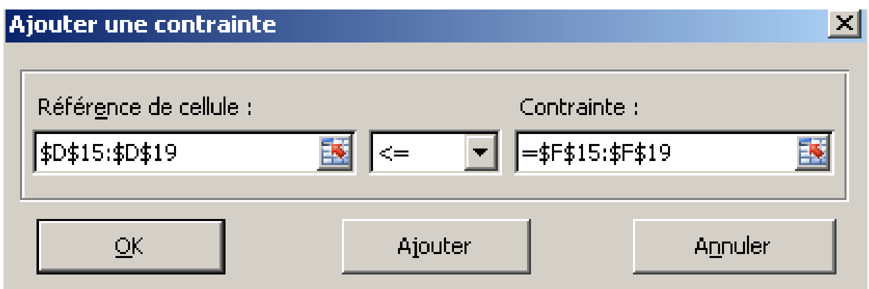
Notes. Pour indiquer les plages des membres gauches ou droits, on peut taper les adresses au lieu de déplacer le curseur et de sélectionner la plage pertinente. Noter aussi que les signes des contraintes technologiques apparaissant dans la colonne E de la feuille SansC ne sont pas utilisés par le solveur, mais servent uniquement à documenter le modèle.

FIGURE 6. La saisie des contraintes

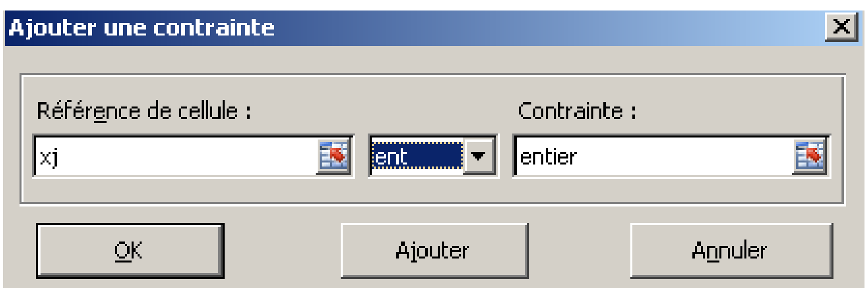
6a



6b

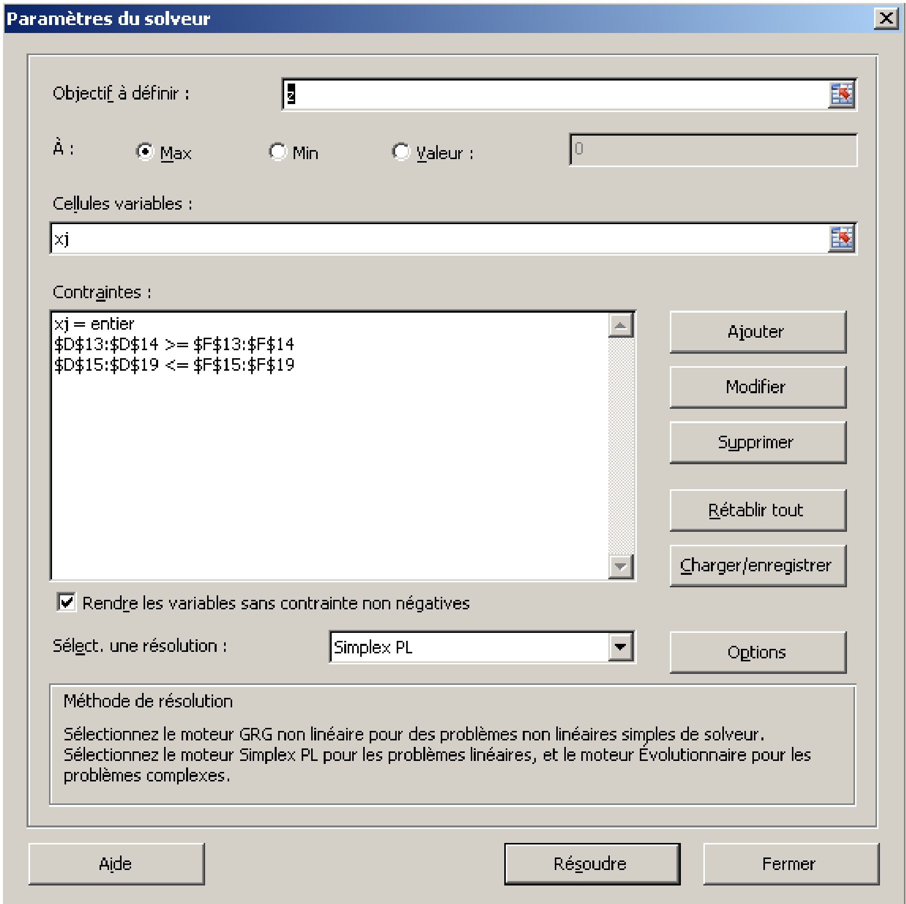


6c



La boîte de dialogue « Paramètres du solveur » devrait maintenant ressembler à celle de la figure 7 (voir page suivante).

FIGURE 7. La boîte « Paramètres du solveur» une fois complétée



Résolution du modèle

Cliquer sur le bouton Résoudre situé au centre-droit de la dernière ligne de la boîte « Paramètres du solveur ». EXCEL tente alors de calculer une solution optimale du modèle linéaire. Dans le présent exemple, il affichera la boîte « Résultats du solveur » de la figure 8 (voir page suivante). Cliquer sur OK : Excel affiche alors dans la plage xj la solution optimale qu'il a calculée, et dans la cellule z, la valeur associée de la fonction-objectif (voir page suivante, figure 9). Il est recommandé de sauvegarder le fichier avant de le fermer.

Note 1. Tous les éléments d'information entrés dans la boîte de dialogue « Paramètres du solveur » sont sauvegardés en même temps que le fichier.

Note 2. À cause de la représentation sous forme binaire finie des nombres en mémoire, il est possible que, pour certaines variables de décision ou certains membres gauches des contraintes technologiques, les valeurs affichées soient légèrement inexactes. Considérons, à titre d'exemple, la feuille V1 du fichier Escomptes.xlsx : après la résolution du modèle linéaire décrit dans cette feuille, la cellule F16 affiche « 7E-13 », alors que la valeur exacte est zéro. L'erreur d'arrondi n'est pas grande ici – et il en est de même dans presque tous les cas.

FIGURE 8 La boîte de dialogue « Résultat du solveur »

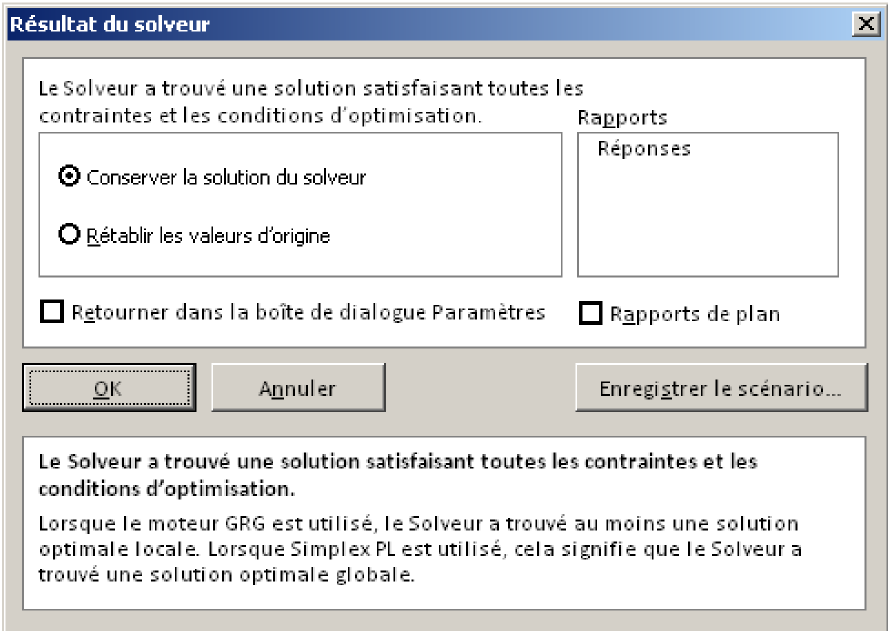
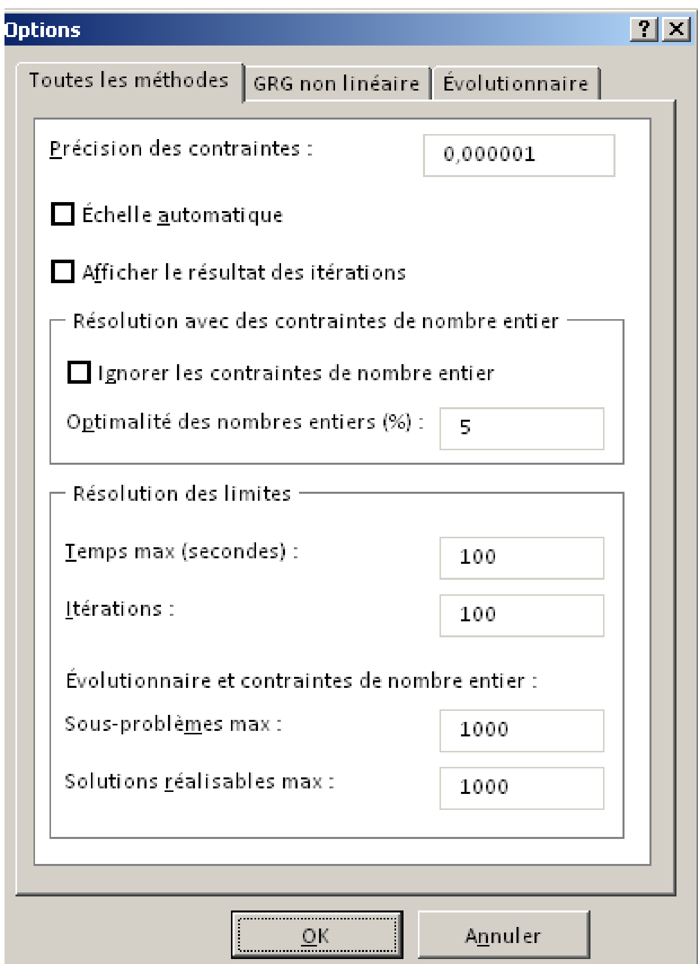


FIGURE 9 La solution optimale obtenue du solveur

	A	B	C	D	E	F
1	**2.1.1 Les chaises de M. Eugène (sans cuisson)**					
2						
3	**Problème de maximisation**					
4						
5	**Dimensions *m* et *n***	7	2			
6						
7						
8	**Noms des variables**	x_A	x_B	M.G.	Signe	Const.
9						
10	**Coefficients c_j et valeur de z**	450	800	83 700		
11						
12	**Contraintes technologiques**					
13	Commande A	1	0	42	>=	42
14	Commande B	0	1	81	>=	53
15	Demande A	1	0	42	<=	100
16	Demande B	0	1	81	<=	100
17	Disp Bras	1,5	2	225	<=	250
18	Disp Laqu	0,5	0,75	81,75	<=	100
19	Disp Capi	2	3	327	<=	327
20						
21	**Types des variables (*a priori* ≥ 0)**	Ent	Ent			
22						
23	**Valeurs des variables x_j**	42	81			

Note 3. Dans certains cas, le message au bas de la boîte « Résultats du solveur » diffère de celui reproduit à la figure 8. En effet, lorsque le modèle comporte des contraintes d'intégrité et qu'une tolérance non nulle a été spécifiée (voir figure 10, zone de texte à droite de Optimalité des nombres entiers(%):), le solveur compare chaque solution admissible obtenue à une borne qu'il calcule (borne supérieure dans le cas d'un modèle de maximisation, et inférieure dans un cas de minimisation) et s'arrête quand l'écart entre la solution admissible courante et cette borne est inférieur à la tolérance indiquée. La solution résultante risque donc d'être sous-optimale. Supposons à titre d'exemple que l'on ait indiqué 1% comme tolérance; le solveur, dès qu'il a obtenu une solution admissible qui diffère de la borne de 1% ou moins, s'arrête et donne cette solution comme satisfaisante; noter que la solution trouvée peut s'écarter de seulement 0,2% du véritable optimum, ou même être optimale. Inscrire une tolérance non nulle permet de réduire le temps de calcul d'un modèle en nombres entiers mais entraîne la possibilité d'obtenir une solution qui soit sous-optimale. Si c'est le cas, le message au bas de la boîte « Résultats du solveur » avertira l'usager du risque encouru : « Le Solveur a trouvé une solution de nombre entier dans la plage de tolérance. Toutes les contraintes sont satisfaites. De meilleures solutions de nombre entier existent peut-être. Pour vous assurer que le Solveur trouve la meilleure solution, définissez le nombre entier de tolérance sur 0% dans la boîte de dialogue des options.» Noter enfin que le paramètre de tolérance est actif seulement si le modèle admet au moins une contrainte d'intégrité.

FIGURE 10 Les options du solveur



2A.4 Fichier avec bornes : deux exemples

Pour alléger la présentation des modèles, on regroupe parfois les inéquations de la forme « $x_j \leq c$ » ou « $x_j \geq c$ », où c est une constante. Cette approche sera illustrée ci-dessous par deux exemples simples. Mais son intérêt se révèle surtout dans les gros modèles : ainsi, dans celui utilisé pour résoudre le problème 44 du chapitre 2, «Les ciments éburnéens», deux lignes du fichier et deux contraintes du solveur suffiront à résumer un ensemble de 26 inéquations. Nous utilisons également cette approche dans le gabarit associé aux modèles de réseaux du chapitre 5 et dans l'annexe 4A où nous décrivons comment construire à l'aide d'Excel les arbres d'énumération requis pour résoudre les modèles en nombres entiers.

Un premier exemple : Les chaises de M. Eugène

Reprenons le problème des chaises de M. Eugène dans sa version sans cuisson. Les contraintes (1) et (3) signifient que la variable x_A appartient à l'intervalle fermé [42; 100] et peuvent être remplacées dans le modèle par (10), où

$$42 \leq x_A \leq 100. \qquad (10)$$

De même, les inéquations (2) et (4) sont équivalentes à (11), où

$$53 \leq x_B \leq 100. \qquad (11)$$

Le modèle linéaire de la page 28 du manuel se récrit donc sous la forme équivalente suivante.

$$\text{Max} \quad z = 450\, x_A + 800\, x_B$$

sous les contraintes :

$$1{,}5\, x_A + 2\, x_B \leq 250 \qquad (5)$$

$$0{,}5\, x_A + 0{,}75\, x_B \leq 100 \qquad (6)$$

$$2\, x_A + 3\, x_B \leq 327 \qquad (7)$$

$$42 \leq x_A \leq 100 \qquad (10)$$

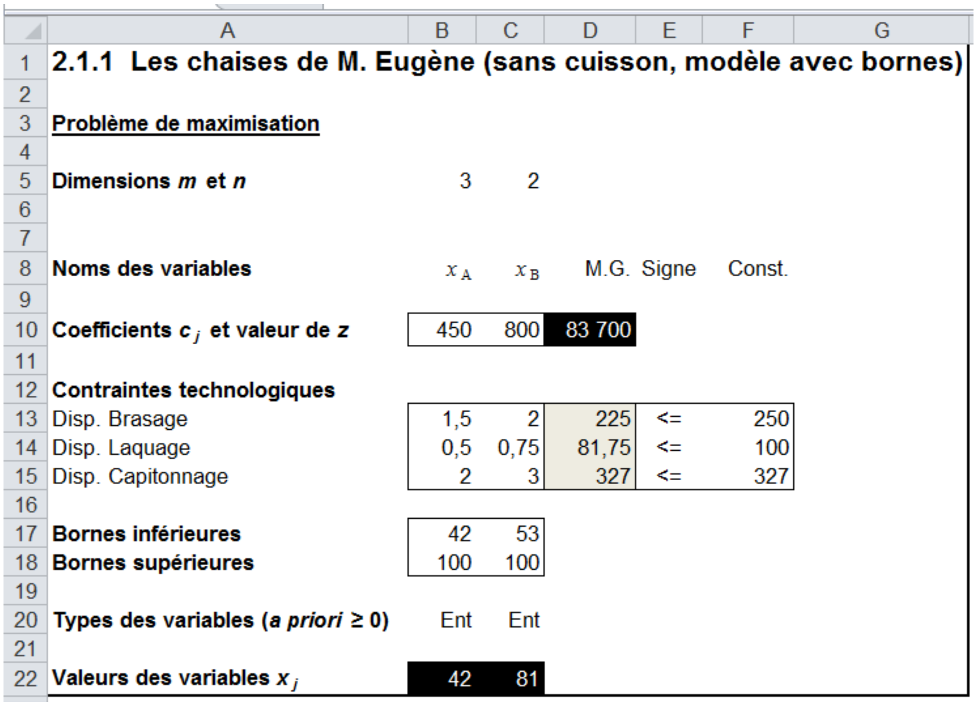
$$53 \leq x_B \leq 100 \qquad (11)$$

$$x_A, x_B \geq 0 \qquad (8)$$

$$x_A, x_B \quad \text{entiers.} \qquad (9)$$

La figure 11 (voir page suivante) décrit la feuille de calcul associée au modèle linéaire précédent. Noter que les bornes des inéquations doubles (10) et (11) apparaissent dans la plage B17:C18 et non dans la section **Contraintes technologiques**.

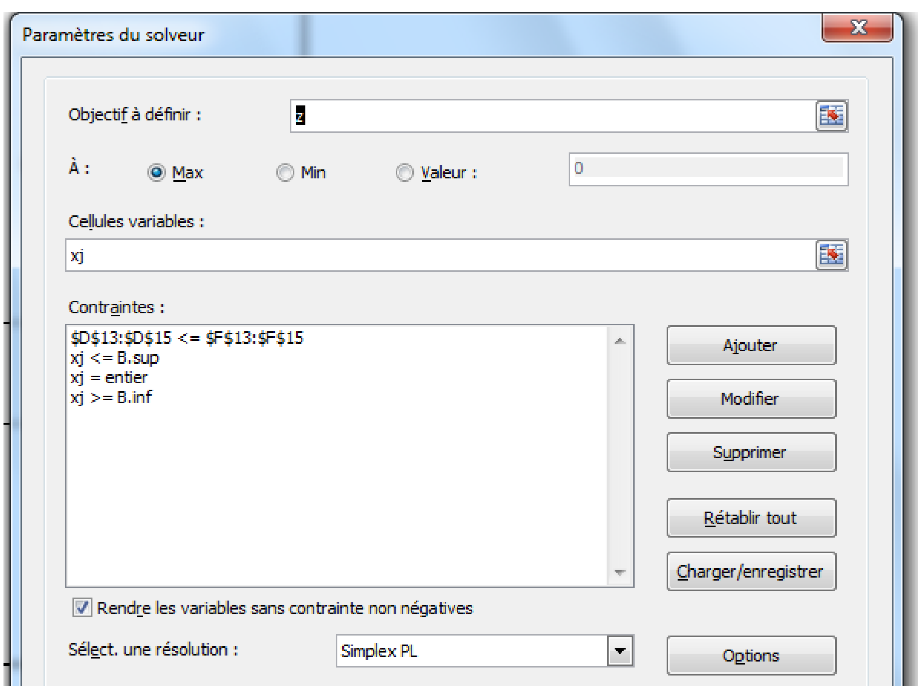
FIGURE 11 Le modèle « *Les chaises de M. Eugène* » avec bornes



	A	B	C	D	E	F	G
1	**2.1.1 Les chaises de M. Eugène (sans cuisson, modèle avec bornes)**						
2							
3	**Problème de maximisation**						
4							
5	**Dimensions *m* et *n***	3	2				
6							
7							
8	**Noms des variables**	x_A	x_B	M.G.	Signe	Const.	
9							
10	**Coefficients c_j et valeur de z**	450	800	83 700			
11							
12	**Contraintes technologiques**						
13	Disp. Brasage	1,5	2	225	<=	250	
14	Disp. Laquage	0,5	0,75	81,75	<=	100	
15	Disp. Capitonnage	2	3	327	<=	327	
16							
17	**Bornes inférieures**	42	53				
18	**Bornes supérieures**	100	100				
19							
20	**Types des variables (*a priori* ≥ 0)**	Ent	Ent				
21							
22	**Valeurs des variables x_j**	42	81				

Convenons d'attribuer les noms **B.inf** et **B.sup** respectivement aux plages B17:C17 et B18:C18 où apparaissent les valeurs numériques des bornes inférieures et supérieures des variables de décision. Les inéquations doubles (10) et (11) sont indiquées au solveur par les lignes 2 et 4 de la zone Contraintes: de la boîte de dialogue illustrée à la figure 12.

Figure 12 La boîte de dialogue « Paramètres du solveur » pour le modèle avec bornes



Un second exemple

L'approche que nous avons retenue exige que, si une borne inférieure (ou supérieure) est utilisée, **toutes** les variables soient soumises à une telle borne. Si un modèle contient des bornes pour seulement pour certaines variables, on convient d'ajouter des bornes par défaut pour les variables qui n'ont pas de bornes explicites dans le modèle. La borne inférieure par défaut est toujours 0. Dans le cas des bornes supérieures, on prend une valeur qui ne risque pas d'être dépassée dans toute solution optimale.

Pour illustrer cette procédure, on utilisera le modèle linéaire suivant, décrit à la page 100 et résolu dans la feuille V3 du fichier Escomptes.xlsx.

$$\text{Max} \quad z = 1{,}40\, x_{Af} + 1{,}40\, x_{Bf} + 1{,}60\, x_{Ag} + 1{,}60\, x_{Bg} - 1{,}75\, y_1 - 1{,}85\, y_2 - 2{,}05\, y_3$$

sous les contraintes :

$$x_{Af} + x_{Ag} \leq 8000 + y_1 + y_2 + y_3 \qquad (12)$$

$$x_{Bf} + x_{Bg} \leq 9000 \qquad (13)$$

$$0{,}5\, x_{Af} - 0{,}5\, x_{Bf} \geq 0 \qquad (14)$$

$$0{,}4\, x_{Ag} - 0{,}6\, x_{Bg} \geq 0 \qquad (15)$$

$$y_h \leq 5000 \qquad h = 1, 2, 3 \qquad (16)$$

$$x_{Ij},\ y_h \geq 0 \qquad I = \text{A, B et } j = \text{f, g et } h = 1, 2, 3. \qquad (17)$$

La figure 13 présente la feuille de calcul associée à ce modèle. Les contraintes (16) imposent une borne supérieure de 5 000 à chacune des variables y_h. Les contraintes technologiques (12) et (13) permettent ensuite de déterminer des bornes supérieures pour les autres variables de décision. De (12) et (16), on déduit aisément celles de x_{Af} et x_{Ag} : on note d'abord que

$$x_{Af} + x_{Ag} \leq 8000 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 8000 + 5000 + 5000 + 5000$$

c'est-à-dire que

$$x_{Af} + x_{Ag} \leq 23\,000\ ;$$

il en résulte que

$$x_{Af} \leq 23\,000 \quad \text{et} \quad x_{Ag} \leq 23\,000.$$

Enfin, (13) permet d'obtenir des bornes supérieures pour les variables x_{Bf} et x_{Bg} :

$$x_{Bf} \leq 9\,000 \quad \text{et} \quad x_{Bg} \leq 9\,000.$$

Noter que l'on a reporté dans les cellules B23 et D23 de la figure 13 la formule =8000+5000+5000+5000, et non la valeur résultante 23 000, afin d'indiquer explicitement comment a été obtenue cette borne supérieure.

Figure 13 La feuille V3 du fichier Escomptes.xlsx décrivant le modèle du 2^e exemple

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**2.3.6 Les fonctions linéaires par parties : les escomptes sur quantité**										
2											
3	Problème de maximisation										
4											
5	Dimensions *m* et *n*	4	7								
6											
7											
8	Noms des variables	xAF	xBF	xAG	xBG	y1	y2	y3	M.G.	Signe	Const.
9											
10	Coefficients c_j et valeur de z	1,40	1,40	1,60	1,60	-1,75	-1,85	-2,05	26 325		
11											
12	Contraintes technologiques										
13	Disp A	1	0	1	0	-1	-1	-1	8000	<=	8 000
14	Disp B	0	1	0	1	0	0	0	9 000	<=	9 000
15	Recette F	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	>=	0
16	Recette G	0	0	0,4	-0,6	0	0	0	0	>=	0
17											
18	Bornes inférieures	0	0	0	0	0	0	0			
19	Bornes supérieures	23 000	9 000	23 000	9 000	5 000	5 000	5 000			
20											
21	Types des variables (*a priori* ≥ 0)										
22											
23	Valeurs des variables x_j	0	0	13 500	9 000	5 000	500	0			

Note. Il est parfois difficile de déterminer des bornes supérieures pour certaines variables. Il est alors recommandé de spécifier les bornes variable par variable, plutôt que globalement, ce qui permet d'imposer des bornes supérieures seulement aux variables pour lesquelles on dispose de bornes évidentes. Dans l'exemple traité ci-dessus, on pourrait définir les contraintes de bornes de la façon illustrée à la figure 14 : les seules variables soumises à des contraintes de bornes seraient alors celles associées aux colonnes F, G et H, soit les variables y_1, y_2 et y_3. On évite ainsi d'avoir à rechercher des bornes supérieures pour les x_{Ij}.

Figure 14 Spécification d'un groupe limité de bornes