3B Solution de base dégénérée

3B.1 Des itérations qui laissent la valeur de *z* inchangée

Les deux itérations du modèle (FRB) décrites dans la section 3.3.6 correspondent au passage du point O au point A, puis à celui de A à B. Dans les deux cas, le profit associé augmente. Cependant, dans la description intuitive de l'algorithme du simplexe, nous avons mentionné que «à partir d'un point extrême initial, l'algorithme du simplexe indique comment passer d'un point extrême à un autre qui lui est adjacent, chaque passage permettant d'améliorer la fonction-objectif, ou tout au moins de ne pas la détériorer». Cette précaution oratoire n'est pas inutile, car il arrive que la valeur de la fonction-objectif reste stable lors d'une itération.

Nous illustrons ici ce phénomène à l'aide d'une version légèrement modifiée du problème de la fonderie Rivière-Bleue, noté (PDég) ci-après, dans laquelle la demande de gueuses s'élève à 20 tonnes seulement.

$$\text{Max } z = 1\,000\, x_1 + 1\,200\, x_2 \qquad (0)$$

sous les contraintes :

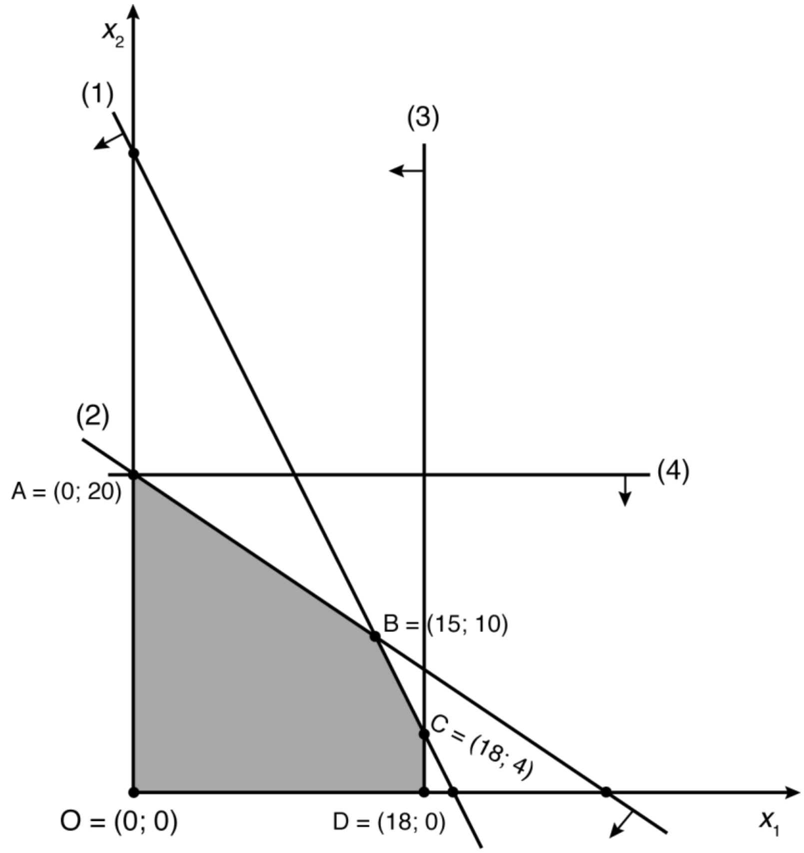
$$
\begin{array}{llll}
10\, x_1 + 5\, x_2 \leq 200 & \text{(ébarbage)} & & (1) \\
2\, x_1 + 3\, x_2 \leq 60 & \text{(peinture)} & \text{(PDég)} & (2) \\
x_1 \leq 18 & \text{(demande de tuyauterie)} & & (3) \\
x_2 \leq 20 & \text{(demande de gueuses)} & & (4) \\
x_1 ,\ x_2 \geq 0. & & & (5)
\end{array}
$$

3B.2 La résolution graphique du modèle (PDég)

Nous appliquerons ci-dessous l'algorithme du simplexe au modèle (PDég). Mais, auparavant, nous résolvons ce modèle graphiquement, afin d'illustrer visuellement les calculs qui seront effectués.

La première étape consiste à construire la région admissible de ce modèle. La figure 1 ci-dessous donne les droites associées aux quatre contraintes technologiques de (PDég). On notera la similitude avec la figure 3.6 du manuel (voir page 140) : la seule différence réside dans le fait que la droite associée à (4) est plus basse et passe par le point A. La région admissible du modèle (PDég) est le polygone OABC.

FIGURE 1 La région admissible du modèle (PDég)



L'unique optimum de (PDég) est le sommet B = (15; 10). L'algorithme du simplexe passera par les sommets O, A et B. Mais, le point A présente une caractéristique géométrique particulière qui rendra plus délicate l'application de l'algorithme du simplexe. En effet, trois droites se rencontrent au point A : les droites associées aux contraintes (2) et (4), ainsi que l'axe vertical, qui est la droite associée à la non-négativité de x_1.

3B.3 La résolution de (PDég) par l'algorithme du simplexe

Le tableau 1 (voir page 3) donne la séquence des lexiques utilisé par l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale de (PDég). À droite du numéro de chaque lexique est donné le point de la figure 1 correspondant à la solution de base associée.

1re itération. La variable entrante est x_2. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, x_1, reste nulle :

TABLEAU 1 Séquence des lexiques du modèle (PDég)

N°	Point	Base	Valeur	x_1	x_2	Limite
0	O	z	0	1 000	1 200	
		e_1	200	-10	-5	40
		e_2	60	-2	-3	20
		e_3	18	-1	0	*
	←	e_4	20	0	**-1**	20
					↑	
1	A	Base	Valeur	x_1	e_4	Limite
		z	24 000	1 000	- 1 200	
		e_1	100	-10	5	10
	←	e_2	0	**-2**	3	0
		e_3	18	-1	0	18
		x_2	20	0	-1	*
				↑		
2	A	Base	Valeur	e_2	e_4	Limite
		z	24 000	-500	300	
	←	e_1	100	5	**-10**	10
		x_1	0	-0,5	1,5	*
		e_3	18	0,5	-1,5	12
		x_2	20	0	-1	20
					↑	
3	B	Base	Valeur	e_1	e_2	
		z	27 000	-30	-350	Optimal
		e_4	10	-0,10	0,50	
		x_1	15	-0,15	0,25	
		e_3	3	0,15	-0,25	
		x_2	10	0,10	-0,50	

$e_1 \geq 0$: $x_2 \leq 200 / 5 = 40$

$e_2 \geq 0$: $x_2 \leq 60 / 3 = 20$

$e_3 \geq 0$: aucune limite, car e_3 est toujours égale à 18 quand $x_1 = 0$

$e_4 \geq 0$: $x_2 \leq 20 / 1 = 20$.

La valeur limite de la variable entrante x_2 est 20 et est atteinte sur deux lignes. Les deux variables de base associées à ces lignes sont des candidates valides au titre de variable sortante. Convenons que e_4 sortira de la base. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la dernière selon le choix que nous venons de faire) permet d'isoler la variable entrante x_2 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_2 = 20 - e_4.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z = 0 + 1\,000\, x_1 + 1\,200\,(20 - e_4) = 24\,000 + 1\,000\, x_1 - 1\,200\, e_4$$

$$e_1 = 200 - 10\, x_1 - 5\,(20 - e_4) = 100 - 10\, x_1 + 5\, e_4$$

$$e_2 = 60 - 2\, x_1 - 3\,(20 - e_4) = 0 - 2\, x_1 + 3\, e_4.$$

Voici le lexique résultant (l'équation impliquant e_3 n'est pas modifiée, car la variable entrante x_2 n'y apparaît pas). La solution de base associée correspond au point A = (0; 20).

Max $z = 24\,000 + 1\,000\, x_1 - 1\,200\, e_4$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lcrcrcr} e_1 & = & 100 & - & 10\, x_1 & + & 5\, e_4 \\ e_2 & = & 0 & - & 2\, x_1 & + & 3\, e_4 \\ e_3 & = & 18 & - & x_1 & & \\ x_2 & = & 20 & & & - & e_4 \end{array}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ e_1 ,\ e_2 ,\ e_3 , e_4 \ \geq\ 0.$$

2^e^ itération. La variable entrante est x_1. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, e_4, reste nulle :

$e_1 \geq 0$: $x_1 \leq 100 / 10 = 10$

$e_2 \geq 0$: $x_1 \leq 0 / 2 = 0$

$e_3 \geq 0$: $x_1 \leq 18 / 1 = 18$

$x_2 \geq 0$: aucune limite, car est toujours égale à 20 quand $e_4 = 0$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_1 est 0 et la variable sortante est e_2. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la 2^e^) permet d'isoler la variable entrante x_1 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_1 \;=\; (0 - 2\,e_2 + 3\,e_4)\,/\,2 \;=\; 0 - 0{,}5\,e_2 + 1{,}5\,e_4.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z \;=\; 24\,000 + 1\,000\,(0 - 0{,}5\,e_2 + 1{,}5\,e_4) - 1\,200\,e_4 \;=\; 24\,000 - 500\,e_2 + 300\,e_4$$

$$e_1 \;=\; 100 - 10\,(0 - 0{,}5\,e_2 + 1{,}5\,e_4) + 5\,e_4 \;=\; 100 + 5\,e_2 - 10\,e_4$$

$$e_3 \;=\; 18 - (0 - 0{,}5\,e_2 + 1{,}5\,e_4) \;=\; 18 + 0{,}5\,e_2 - 1{,}5\,e_4.$$

Voici le lexique résultant (l'équation impliquant x_2 n'est pas modifiée, car la variable entrante x_1 n'y apparaît pas). La solution de base associée correspond encore au point A = (0; 20).

Max $z \;=\; 24\,000 - 500\,e_2 + 300\,e_4$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
e_1 & = & 100 & + & 5{,}0\,e_2 & - & 10{,}0\,e_4 \\
x_1 & = & 0 & - & 0{,}5\,e_2 & + & 1{,}5\,e_4 \\
e_3 & = & 18 & + & 0{,}5\,e_2 & - & 1{,}5\,e_4 \\
x_2 & = & 20 & & & - & e_4
\end{array}$$

$$x_1\,,\;x_2\,,\;e_1\,,\;e_2\,,\;e_3\,,\,e_4 \;\geq\; 0.$$

3^e^ itération. La variable entrante est e_4. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, e_2, reste nulle :

$e_1 \;\geq\; 0$: $e_4 \;\leq\; 100 / 10 = 10$

$x_1 \;\geq\; 0$: aucune limite, car x_1 augmente quand e_4 augmente et $e_2 = 0$

$e_3 \;\geq\; 0$: $e_4 \;\leq\; 18 / 1{,}5 = 12$

$x_2 \;\geq\; 0$: $e_4 \;\leq\; 20 / 1 = 20$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante e_4 est 10 et la variable sortante est e_1. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la 1^re^) permet d'isoler la variable entrante e_4 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$e_4 \;=\; (100 - e_1 + 5\,e_2)\,/\,10 \;=\; 10 - 0{,}1\,e_1 + 0{,}5\,e_2.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z \;=\; 24\,000 - 500\,e_2 + 300\,(10 - 0{,}1\,e_1 + 0{,}5\,e_2) \;=\; 27\,000 - 30\,e_1 - 350\,e_2$$

$$x_1 \;=\; 0 - 0{,}5\,e_2 + 1{,}5\,(10 - 0{,}1\,e_1 + 0{,}5\,e_2) \;=\; 15 - 0{,}15\,e_1 + 0{,}25\,e_2$$

$e_3 = 18 + 0{,}5\, e_2 - 1{,}5\,(10 - 0{,}1\, e_1 + 0{,}5\, e_2) = 3 + 0{,}15\, e_1 - 0{,}25\, e_2$

$x_2 = 20 - (10 - 0{,}1\, e_1 + 0{,}5\, e_2) = 10 + 0{,}1\, e_1 - 0{,}5\, e_2.$

Voici le lexique résultant. La solution de base associée correspond encore au point B = (15; 10).

$$\text{Max } z = 27\,000 - 30\, e_1 - 350\, e_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lcrcrcr} e_4 & = & 10 & - & 0{,}10\, e_1 & + & 0{,}50\, e_2 \\ x_1 & = & 15 & - & 0{,}15\, e_1 & + & 0{,}25\, e_2 \\ e_3 & = & 3 & + & 0{,}15\, e_1 & - & 0{,}25\, e_2 \\ x_2 & = & 10 & + & 0{,}10\, e_1 & - & 0{,}50\, e_2 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \ \geq\ 0.$$

Ce dernier lexique est optimal.

3B.4 Les difficultés reliées à la dégénérescence

Dans la solution de base associée au lexique 1 du modèle (PDég), l'une des variables de base est nulle. On parle alors de **solution de base dégénérée**. Ce phénomène de dégénérescence survient ici parce que, dans le tableau précédent, plus d'une variable de base correspondent à la plus petite limite : une seule d'entre elles est sortie de la base et l'autre, restant dans la base, a pris la valeur 0 dans le lexique 1 résultant du pivotage.

L'itération subséquente fait entrer x_1 dans la base, à la place de e_2. Mais la solution de base associée au lexique 2 correspond encore au sommet A : x_1, qui était hors base et nulle, est entrée dans la base pour y prendre la valeur 0; aucune variable n'a changé de valeur entre les lexiques 1 et 2. Géométriquement, il ne s'est rien passé, les lexiques 1 et 2 étant tous deux associés au point A = (0; 20) : la 2^{e} itération a donc permis de passer du point A … au point A! Ainsi, plusieurs solutions de base correspondent au même point extrême A.

Un lexique de (PDég) exige 4 variables de base et 2 variables hors base, ces dernières étant nécessairement nulles. En A, 3 des 6 variables de (PDég=) prennent la valeur 0 : x_1, e_2 et e_4. On peut considérer, pour définir une solution de base, 2 quelconques de ces 3 variables nulles comme hors base. Il existe 3 façons d'effectuer un tel choix et, par conséquent, 3 solutions de base et 3 lexiques associés à A :

1. Variables hors base : x_1 et e_4 — Variables de base : x_2, e_1, e_2 et e_3
2. Variables hors base : e_2 et e_4 — Variables de base : x_1, x_2, e_1 et e_3

3. Variables hors base : x_1 et e_2 Variables de base : x_2, e_1, e_3 et e_4.

Les choix 1 et 2 correspondent aux lexiques numéros 1 et 2 respectivement, l'autre lexique possible n'apparaissant pas dans la séquence illustrée au tableau 1 de la page 4. Dans le choix 1, on considère que A est défini comme le sommet situé à l'intersection des droites associées aux contraintes « $x_1 \geq 0$ » et « $x_2 \leq 20$ »; que la valeur nulle de e_2, ou encore l'appartenance de A à la droite associée à « $2x_1 + 4x_2 \leq 60$ », sont anecdotiques. Dans le choix 2, ce qui est considéré anecdotique, c'est le fait que A soit situé sur l'axe vertical et que x_1 prenne la valeur 0.

Dans les lexiques 1 et 2, les valeurs des variables sont identiques mais les équations sous-jacentes, bien qu'équivalentes, diffèrent et les coûts marginaux aussi. Lors de la première itération, nous avons opté pour e_4 comme variable sortante. Si e_2 avait été retenue, le pivotage aurait conduit au choix 3. Toutefois, la variable entrante x_1 aurait dans ce cas admis une limite de 15 et le pivotage subséquent aurait conduit au sommet B, qui, comme on le sait, est l'optimum. On aurait donc économisé une itération en retenant e_2 au lieu de e_4 comme variable sortante dans le lexique 0. Malheureusement, il est difficile, sinon impossible, de donner un truc simple qui permettrait, en cas de dégénérescence, de choisir celle des variables candidates qui conduit à l'optimum par le plus petit nombre d'itérations.

Dans l'exemple (PDég) traité ici, les lexiques 1 et 2 correspondent au même sommet A et la valeur de z reste inchangée lorsqu'on passe de l'un à l'autre. Mais, lors de la 3^e^ itération, on quitte A (adieu A!) et z augmente. En théorie, on ne pouvait être sûr, avec les critères d'entrée et de sortie utilisés, de ne pas rester indéfiniment en A : il était *a priori* possible qu'après les lexiques 1 et 2 correspondant aux choix 1 et 2, l'algorithme du simplexe produise un lexique 3 correspondant au choix 3, puis un lexique 4 identique au premier, puis un lexique 5 identique au deuxième... Et s'amorcerait un phénomène de cyclage répété à l'infini sans que jamais la solution optimale ne soit atteinte. La seule garantie de l'absence de cyclage dans le cas d'un modèle de maximisation est l'augmentation[1] de la valeur de z à chaque itération : il est alors impossible que les pivotages ramènent à un lexique déjà obtenu car, la deuxième fois, la valeur de z serait nécessairement plus grande.

La dégénérescence d'un modèle linéaire a donc le potentiel d'engager l'algorithme du simplexe dans un cyclage sans fin, bien que ce problème ait pu être évité dans l'exemple précédent. Le phénomène de cyclage semble se rencontrer surtout dans les modèles de grande taille très dégénérés. Il s'est avéré difficile d'inventer des «petits» modèles où le phénomène de cyclage se présente. Un des premiers à avoir réussi cet «exploit» est Beale[2]. Nous donnons ici un exemple construit par Chvátal[3] :

---

[1] Ou diminution dans le cas d'un modèle de minimisation.

[2] E.M.L. Beale; «Cycling in the Dual Simplex Algorithm»; Naval Research Logistics Quarterly 2 (1955); p. 269-276.

[3] V. Chvátal; «Linear Programming»; Freeman, 1983; p. 31-32.

Max $z = 0\,x_1 - 57\,x_2 - 9\,x_3 - 24\,x_4$

sous les contraintes :

$$0{,}5\,x_1 - 5{,}5\,x_2 - 2{,}5\,x_3 + 9\,x_4 \leq 0$$

$$0{,}5\,x_1 - 1{,}5\,x_2 - 0{,}5\,x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.$$

Ce modèle est dégénéré d'entrée de jeu car le second membre des deux premières contraintes technologiques est égal à 0. Il est possible d'amener l'algorithme du simplexe à cycler en imposant les règles suivantes d'entrée dans la base et de sortie de la base :

(a) la variable qui entre dans la base est celle dont le coût marginal est le plus élevé;

(b) lorsque plusieurs variables peuvent sortir de la base, on choisit celle dont l'**indice** est le plus bas.

Le septième lexique sera alors identique au premier et l'algorithme du simplexe cyclera.

Diverses astuces ont été mises au point pour empêcher le cyclage, telles les techniques de perturbation des seconds membres des contraintes ou encore le choix lexicographique pour la variable sortante. Le lecteur intéressé consultera les ouvrages spécialisés[4]. Terminons en citant les travaux de R.G. Bland[5] qui a montré que, lors de la résolution d'un problème de maximisation, l'algorithme du simplexe ne peut cycler si

(a) pour entrer dans la base, on choisit celle, parmi les variables dont le coût marginal est non négatif, qui est dotée du plus petit indice;

(b) pour sortir de la base, on choisit celle des variables candidates dont l'indice est le plus petit.

[4] Voir, par exemple, A. Schrijver; «Theory of Linear and Integer Programming»; Wiley, 1986.

[5] R. G. Bland; «New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method»; Mathematics of Operations Research, vol. 2 (1977), p. 103-107.