3C Les modèles non bornés

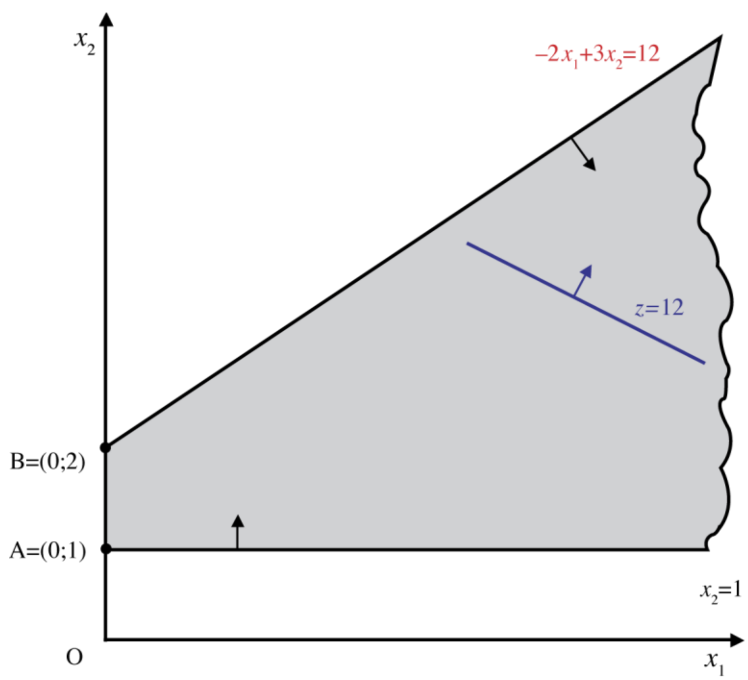
3C.1 Un exemple à deux variables de décision

À la page 158, nous avons analysé un modèle linéaire continu non borné. Nous en considérons ici une version légèrement modifiée, où le coefficient de x_2 dans la fonction-objectif vaut 2, au lieu de 1. Ce changement simplifiera l'analyse algébrique que nous ferons au paragraphe 3C.2.

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } z = x_1 + 2\,x_2 \\
\text{sous les contraintes :} \\
\quad -2\,x_1 + 3\,x_2 \le 6 \\
\quad x_2 \ge 1 \\
\quad x_1\,,\ x_2 \ge 0.
\end{array}
\qquad (P)
$$

La région admissible de (P), qui correspond à la portion ombrée de la figure 1 ci-dessous, est illimitée. De plus, il est immédiat visuellement que la fonction-objectif z peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Nous disons que le **modèle** (P) est **non borné**.

FIGURE 1 La région admissible du modèle (P)



3C.2 Analyse algébrique du modèle

Mais comment détecter cette propriété du modèle (P) sans recourir à la représentation graphique? Comment réagit l'algorithme du simplexe au fait que (P) n'est pas borné?

Comme (P) contient une contrainte technologique de signe « $\geq$ », l'origine O = (0; 0) n'est pas admissible et il faudra recourir à la méthode en deux phases (voir annexe 3A). La 1re, qui vise à obtenir une solution de base admissible initiale, nécessite une seule itération, qui correspond au passage de O au sommet A = (0; 1). La 1re itération de la phase II nous mènera en B = (0; 2). Voici le lexique correspondant.

$$\text{Max } z = 4 + 2{,}33\,x_1 - 0{,}67\,e_1$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} e_2 &= 1 + 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,e_1 \\ x_2 &= 2 + 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,e_1 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 \geq 0.$$

La solution de base associée n'est pas optimale puisque l'amélioration marginale de la variable hors base x_1 est positive. Dans le but d'augmenter la valeur de z, on démarre une itération. La variable entrante est x_1. La prochaine étape consiste à déterminer la valeur maximale que peut prendre x_1. À cette fin, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, e_1, reste nulle :

$e_2 \geq 0$: aucune limite, car e_2 augmente quand x_1 augmente et $e_1 = 0$

$x_2 \geq 0$: aucune limite, car x_2 augmente quand x_1 augmente et $e_1 = 0$.

La variable entrante x_1 peut donc prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, et il en est de même de la fonction-objectif z. Ainsi, le modèle (P) est non borné.

3C.3 Distinction entre région non bornée et modèle non borné

Considérons le modèle (P') obtenu de (P) en minimisant la fonction-objectif z plutôt que la maximiser.

$$\text{Min } z = x_1 + 2\,x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} -2\,x_1 + 3\,x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

La région admissible de (P') est cette fois encore la portion ombrée de la figure 1 et est illimitée vers la droite. Par contre, z est bornée et atteint son minimum au sommet A = (0; 1). Ainsi, pour qu'un modèle linéaire soit non borné, il ne suffit pas que sa région admissible soit non bornée. Il faut également vérifier que la fonction-objectif prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Noter que cette situation pathologique de modèle borné dont la région admissible est illimitée peut survenir même dans un cas de maximisation. En voici un exemple très simple.

$$\text{Max } \; z = x_1 - x_2$$

sous les contraintes :

$$x_1 \leq 5$$
$$x_1 , \; x_2 \geq \; 0.$$

La fonction-objectif z atteint sa valeur maximale 5 au sommet A = (5; 0), mais la région admissible est illimitée comme le montre la figure 2 suivante.

FIGURE 2 Un exemple de modèle borné avec région admissible illimitée