3E Calcul des intervalles de variation et analyse de scénarios

Lorsque, au tout début de la construction d'un modèle quantitatif, l'on y incorpore des coûts, des taux, des quantités de ressources disponibles, on néglige dans ce premier effort d'y introduire les variations éventuelles de ces paramètres qui seraient causées par la difficulté des approvisionnements en matériaux, par la présence des aléas de productivité, par la possibilité de pannes et tutti quanti. Et pourtant, il faudrait en tenir compte pour avoir une image complète et réaliste du problème traité. Bien que la zone grise plus ou moins diffuse dans laquelle baigne chaque nombre n'ait pas à être circonscrite au départ, on s'attend à ce que les nombres utilisés soient éventuellement pris avec un grain de sel, comme on prendrait en compte une vision politicienne du réel, c'est-à-dire en apportant des nuances, en dégonflant peu ou prou les prévisions, en atténuant ou en accentuant les valeurs annoncées. Et comme chaque donnée peut en fait osciller autour de la valeur déclarée, on comprendra que ces divers mouvements puissent se conjuguer de façon complexe – les petites causes n'entraînent-elles pas souvent de grands effets? – pour modifier la valeur des variables de décision obtenues dans une solution optimale. Il arrive même qu'une fois les imprécisions sur les données levées dans un sens ou dans l'autre, les variables de base de la nouvelle solution optimale forment un groupe qui présente peu de points communs avec celui obtenu des données initiales.

On comprend qu'il faille investiguer la sensibilité des solutions optimales aux changements envisageables dans la valeur des différents coefficients apparaissant dans la fonction-objectif ou dans les contraintes technologiques. Cette analyse à laquelle nous soumettrons les modèles porte le nom d'***analyse de scénarios***, pour la bonne raison que cette analyse s'intéresse aux mouvements de la solution optimale induits par des changements apportés aux valeurs des paramètres.

Nous ne donnerions qu'en partie raison à qui prétendrait qu'il vaut mieux, pour tenir compte de chaque fournée de ces variations, reprendre chaque fois le chemin des pivotages plutôt que s'astreindre à en prévoir les effets sur la solution optimale d'origine. En effet, suivre cette recette de facilité, c'est se priver de la vision intimiste, que fournit l'analyse de scénarios, du degré de stabilité de la solution optimale. L'analyse de scénarios permet en effet de détecter les paramètres dont une faible oscillation suffit à chambarder la solution optimale proposée par le tableau final. Elle fournit au décideur averti des diagnostics prémonitoires qui l'inciteront à recourir à de meilleures estimations des paramètres les plus sensibles du modèle ou à mettre en place des mécanismes de surveillance de ces paramètres déclencheurs de changements par leurs moindres glissements.

L'objectif de cette annexe est de décrire l'impact sur la solution optimale de changements apportés à l'un ou l'autre des paramètres du modèle. Notre étude comporte deux parties. Dans la première, qui regroupe les articles 1 et 2, le problème de la Fonderie Rivière-Bleue est utilisé pour illustrer les principes fondamentaux de l'analyse de scénarios :

- Nous indiquons d'abord comment déterminer géométriquement, puis algébriquement, l'impact sur la solution optimale de changements apportés à l'un des coefficients c_j de la fonction-objectif; nous calculons également l'intervalle de variation d'un tel coefficient c_j.
- À l'article 2, nous décrivons, géométriquement puis algébriquement, les effets induits sur la région admissible et sur la solution optimale par des modifications apportées à l'un des b_i, membres droits des contraintes; enfin, nous calculons l'intervalle de variation d'un tel b_i.

L'analyse algébrique se présente ici sous une forme légèrement différente que dans la section 3.4. Évidemment, les résultats sont les mêmes. Dans la seconde partie (articles 3 et 4), nous illustrerons par quelques exemples les questions usuelles auxquelles l'analyse de scénarios permet de répondre.

3E.1 Modification d'un coefficient c_j de la fonction-objectif

Approche géométrique

Nous illustrons notre propos par le modèle (FRB) déjà utilisé dans les sections 1, 2 et 3 du chapitre 3. Rappelons ce modèle.

$$\text{Max } z = 1\,000\, x_1 + 1\,200\, x_2 \qquad (0)$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{llll}
10\, x_1 + 5\, x_2 \leq 200 & \text{(ébarbage)} & & (1) \\
2\, x_1 + 3\, x_2 \leq 60 & \text{(peinture)} & \text{(FRB)} & (2) \\
x_1 \leq 18 & \text{(demande de tuyauterie)} & & (3) \\
x_2 \leq 30 & \text{(commande de gueuses)} & & (4) \\
x_1 ,\ x_2 \geq 0. & & & (5)
\end{array}$$

Nous avons vu que la solution optimale de (FRB) correspond au point B = (15; 10) et propose de produire 15 tonnes de tuyauterie et 10 tonnes de gueuses. Aurèle, le propriétaire de la fonderie, songe cependant à hausser le prix des tuyaux et il aimerait savoir si ce plan de production resterait optimal. Pour l'instant, il commence seulement à explorer cette option et il ne serait pas encore en mesure d'évaluer l'impact d'une hausse de prix sur la demande : il considère donc en première analyse que celle-ci ne serait pas affectée. Ainsi, Aurèle s'intéresse au modèle (FRB') consistant à maximiser

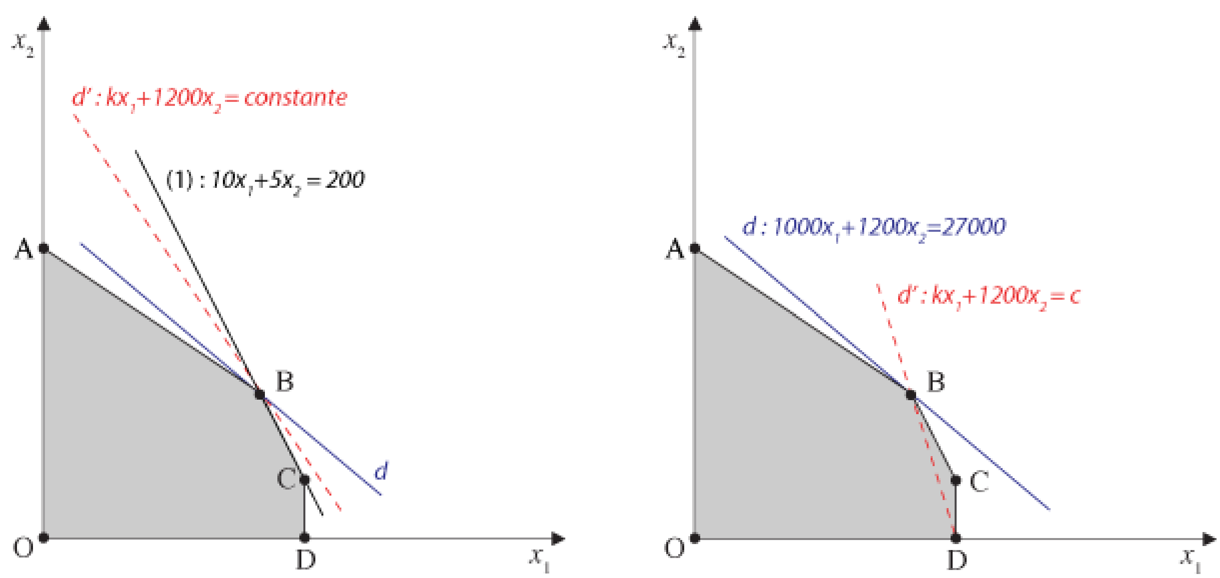
$$z' = k\, x_1 + 1200\, x_2 \qquad (6)$$

sous les mêmes contraintes (1) à (5). Aurèle considère plus particulièrement les valeurs de k supérieures à 1000. Mais, pour mieux illustrer la technique de résolution, nous permettrons à k de prendre également des valeurs inférieures à 1000.

Nous déterminerons pour quelles valeurs de k le point B = (15; 10) constitue une solution optimale de (FRB'). L'ensemble de ces valeurs s'appelle l'***intervalle de variation*** du coefficient c_1.

Notre approche sera d'abord géométrique. Pour une valeur fixée de k, les courbes de niveau de la fonction-objectif modifiée z' sont des droites de pente[1] $-k/1200$, parallèles entre elles. Lorsque k augmente, ces droites adoptent des pentes qui sont, en valeur absolue, de plus en plus grandes. Si k dépasse 1000 légèrement (voir figure 1, graphique de gauche), la courbe de niveau d' de z' passant par le point B = (15; 10) se situe dans l'angle formé par la droite d associée à la fonction-objectif originale z et par la droite associée à la contrainte (1), et B est l'unique solution optimale de (FRB'). Par contre, si k est suffisamment élevé (voir figure 1, graphique de droite), la courbe de niveau d' passant par B coupe l'intérieur du polygone OABCD et c'est au sommet C = (18; 4) que se situe alors l'optimum de (FRB').

FIGURE 1 Influence de *k* sur les courbes de niveau de *z'* : cas où *k* > 1000



Le cas limite où le sommet B cesse d'être optimal est atteint lorsque les droites de niveau de z' deviennent parallèles à la droite BC associée à la contrainte (1). Et k vaut alors 2400 puisque

$$-k/1200 \;=\; \text{pente de } d' \;=\; \text{pente de la droite BC} \;=\; -10/5$$

$$k \;=\; (10/5) \times 1200 \;=\; 2400.$$

[1] Considérons une courbe de niveau d' particulière d'équation $z' = k\,x_1 + 1200\,x_2 = c$, où k est supposé positif et où c est une constante. Et isolons la variable x_2 associée à l'axe vertical :

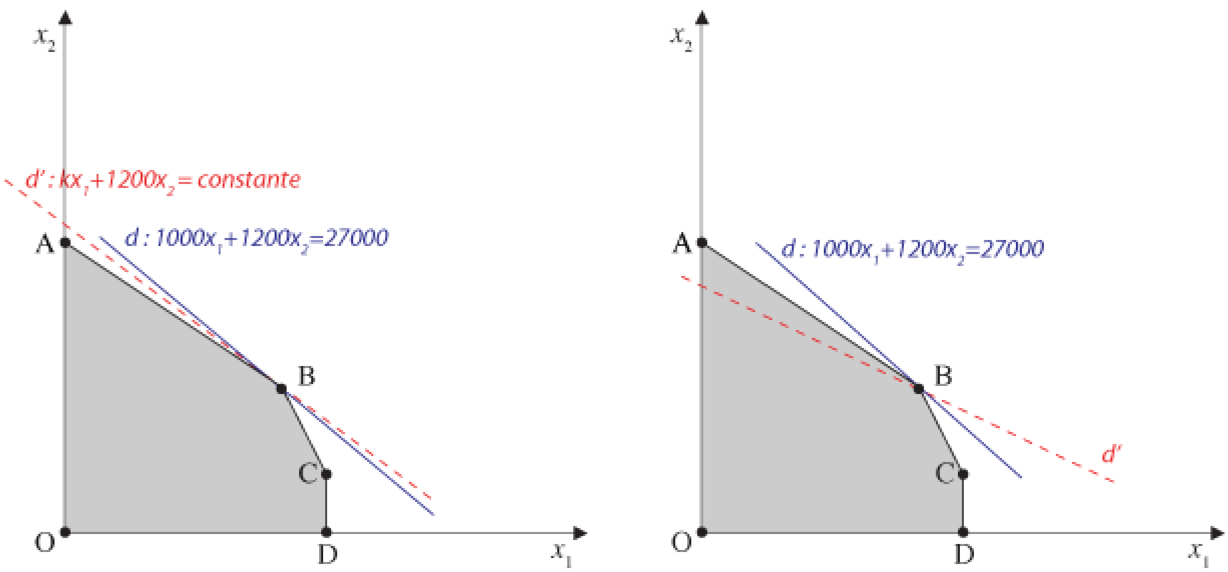
$$1200\,x_2 \;=\; -\,k\,x_1 + c$$

$$x_2 \;=\; (-\,k/1200)\,x_1 + (c/1200).$$

La pente de la droite représentée par cette équation est égale au coefficient de x_1, soit $-k/1200$: en effet, si la variable x_1 associée à l'axe horizontal est augmentée de 1, la variable x_2 associée à l'axe vertical diminue de $k/1200$.

De même, si k est légèrement inférieur à 1000 (voir figure 2, graphique de gauche), la droite d' est dans l'angle formé par d et par la droite associée à la contrainte (2), et B est l'unique solution optimale de (FRB'). Lorsque k diminue, la droite d' devient de plus en plus horizontale et, au-delà d'une certaine valeur limite, B cesse d'être le sommet optimal et voit A le supplanter dans ce rôle (voir figure 2, graphique de droite). Le cas limite correspond à la valeur du paramètre k qui rend d' parallèle à la droite associée à (2) : par conséquent, $k = (2/3) \times 1200 = 800$.

FIGURE 2 Influence de *k* sur les courbes de niveau de *z'* : cas où 0 < *k* < 1000



En résumé :

- si $k < 800$, le sommet A est l'unique solution optimale de (FRB');
- si $k = 800$, tous les points du segment [A; B] sont des solutions optimales de (FRB');
- si k est compris entre 800 et 2400, le sommet B est l'unique solution optimale de (FRB');
- si $k = 2400$, tous les points du segment [B; C] sont des solutions optimales de (FRB');
- si $k > 2400$, le sommet C est l'unique solution optimale de (FRB').

Ainsi, l'intervalle de variation du coefficient c_1 du modèle (FRB) est l'intervalle [800; 2400].

Dans le présent exemple, lorsque le paramètre c_1 dépasse la borne 2400, l'optimum passe du sommet B au sommet adjacent C et y reste, quelles que soient les augmentations ultérieures données à c_1. Cette stabilité ne s'obtient pas aussi rapidement dans tous les modèles : il existe souvent une suite de bornes qui, chacune, déclenchent le passage de l'optimum en un nouveau sommet. Certains logiciels décrivent, sous le nom d'***analyse paramétrique***, l'évolution de l'optimum pour toutes les valeurs possibles d'un paramètre donné, à choisir parmi les c_j ou les b_i.

Approche algébrique

Tel qu'indiqué dans la section 3.3.7 (voir pages 191 et 192), l'analyse algébrique recourt au lexique optimal. Rappelons que, dans le cas du modèle (FRB), le lexique optimal prend la forme suivante et que la solution de base associée correspond au sommet B = (15; 10).

$$\text{Max } z = 27\,000 - 30\, e_1 - 350\, e_2 \tag{7}$$

sous les contraintes :

$$x_1 = 15 - 0{,}15\, e_1 + 0{,}25\, e_2 \tag{8}$$

$$x_2 = 10 + 0{,}10\, e_1 - 0{,}50\, e_2 \tag{9}$$

$$e_3 = 3 + 0{,}15\, e_1 - 0{,}25\, e_2 \qquad \text{(Lexique n}^{\text{o}}\text{ 2)} \tag{10}$$

$$e_4 = 20 - 0{,}10\, e_1 + 0{,}50\, e_2 \tag{11}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \geq 0. \tag{12}$$

Notre premier objectif est de construire le lexique de (FRB') associé au sommet B. Notons d'abord que modifier uniquement la fonction-objectif d'un modèle linéaire n'a pas d'impact sur la région admissible puisque les contraintes demeurent inchangées. Les équations (8) à (11) du Lexique n° 2 demeurent donc valides avec la fonction-objectif z'. Le lexique recherché comprendra également les contraintes (12) de non-négativité, ainsi que l'objectif z'. L'équation (6) ne fera pas l'affaire, car elle fait intervenir les variables de base x_1 et x_2. Pour obtenir la version désirée de la fonction-objectif modifiée z', nous récrivons d'abord (6) sous la forme suivante :

$$z' = (1000 + \Delta)\, x_1 + 1\,200\, x_2 = z + \Delta\, x_1. \tag{13}$$

Puis, nous transformons (13) en remplaçant z et x_1 par les valeurs données dans les équations (7) et (8) du lexique optimal de (FRB) :

$$z' = 27\,000 - 30\, e_1 - 350\, e_2 + \Delta\,(15 - 0{,}15\, e_1 + 0{,}25\, e_2).$$

Après quelques manipulations algébriques, cette dernière équation se récrit :

$$z' = (27\,000 + 15\,\Delta) - (30 + 0{,}15\,\Delta)\, e_1 - (350 - 0{,}25\,\Delta)\, e_2. \tag{14}$$

Voici donc le lexique de (FRB') associé au sommet B.

$$\text{Max } z' = (27\,000 + 15\,\Delta) - (30 + 0{,}15\,\Delta)\, e_1 - (350 - 0{,}25\,\Delta)\, e_2 \tag{15}$$

sous les contraintes :

$$x_1 = 15 - 0{,}15\, e_1 + 0{,}25\, e_2 \tag{16}$$

$$x_2 \;=\; 10 + 0{,}10\, e_1 - 0{,}50\, e_2 \qquad (17)$$

$$e_3 \;=\; 3 + 0{,}15\, e_1 - 0{,}25\, e_2 \qquad \text{(Lexique FRB')} \qquad (18)$$

$$e_4 \;=\; 20 - 0{,}10\, e_1 + 0{,}50\, e_2 \qquad (19)$$

$$x_1,\; x_2,\; e_1,\; e_2,\; e_3,\; e_4 \;\geq\; 0. \qquad (20)$$

En attribuant, dans ce lexique, la valeur 0 aux variables hors base e_1 et e_2, on obtient la solution de base admissible (15; 10; 0; 0; 3; 20). Cette solution, qui est optimale pour le modèle (FRB), ne sera optimale pour (FRB') que si les améliorations marginales des variables hors base e_1 et e_2 sont négatives ou nulles. Analysons ce que signifie cette condition.

- Dans le cas de la variable e_1, l'amélioration marginale est négative ou nulle

si et seulement si $-(30 + 0{,}15\,\Delta) \;\leq\; 0$

si et seulement si $30 + 0{,}15\,\Delta \;\geq\; 0$

si et seulement si $0{,}15\,\Delta \;\geq\; -30$

si et seulement si $\Delta \;\geq\; -30 / 0{,}15 \;= -200.$

- Dans le cas de la variable e_2, l'amélioration marginale est négative ou nulle

si et seulement si $-(350 - 0{,}25\,\Delta) \;\leq\; 0$

si et seulement si $350 - 0{,}25\,\Delta \;\geq\; 0$

si et seulement si $0{,}25\,\Delta \;\leq\; 350$

si et seulement si $\Delta \;\leq\; 350 / 0{,}25 \;= 1400.$

En résumé, le lexique (15) à (20) est optimal pour le modèle (FRB')

si et seulement si $-200 \;\leq\; \Delta \;\leq\; 1400$

si et seulement si $800 \;\leq\; 1000 + \Delta \;\leq\; 2400.$

Ainsi, l'intervalle de variation du coefficient c_1 du modèle (FRB) est l'intervalle [800; 2400].

3E.2 Modification d'un coefficient b_i, membre droit d'une contrainte technologique

Approche géométrique

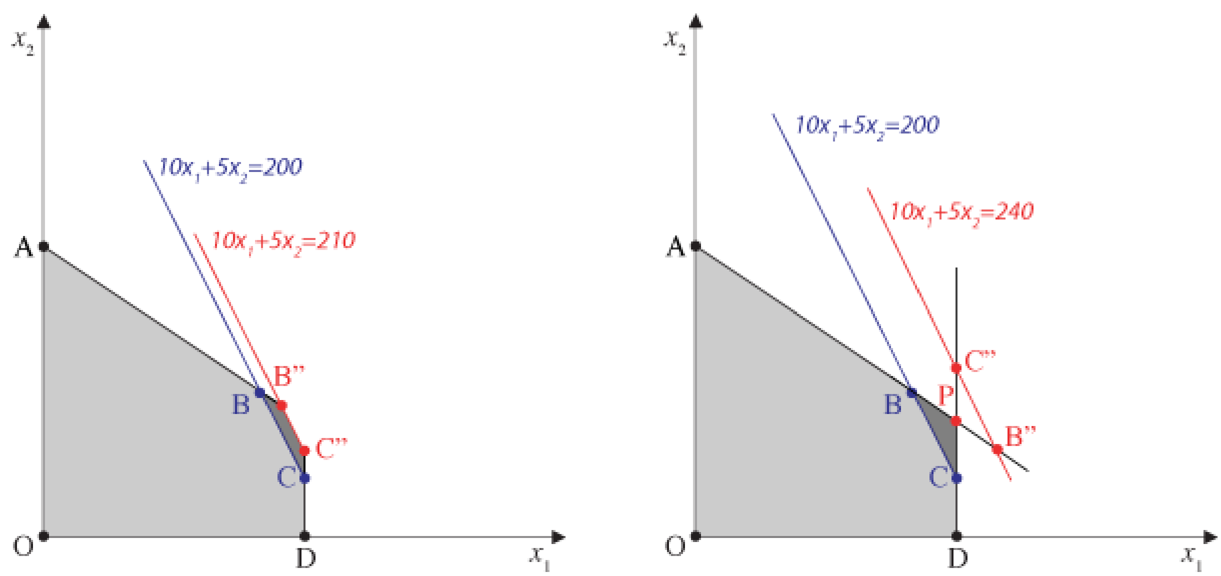
Supposons maintenant qu'Aurèle cherche à maximiser la fonction-objectif originale z tout en ne sachant pas précisément de combien d'heures il disposera à l'atelier d'ébarbage la semaine prochaine. C'est dire qu'Aurèle cherche à résoudre le modèle (FRB") qui consiste à maximiser z sous les contraintes (21), (2), (3), (4) et (5), où

$$10\,x_1 + 5\,x_2 \;\leq\; k. \tag{21}$$

Les figures 3 et 4 indiquent l'effet sur la région admissible d'une variation du membre droit de la contrainte (1). Dans la première, on considère que le nombre k d'heures disponibles dans l'atelier d'ébarbage dépasse la valeur 200 utilisée dans le modèle (FRB). Le graphique de gauche de la figure 3 correspond à la valeur k = 210 : la région admissible de (FRB") est représentée par le polygone OAB"C"D et l'optimum de (FRB") est atteint au sommet B" = (16,5; 9), intersection des droites associées aux contraintes (21) et (2), tout comme l'optimum de (FRB) est le sommet B commun aux droites associées à (1) et à (2).

Par contre, dans le graphique de droite de la figure 3, le point B" situé à l'intersection des droites associées aux contraintes (21) et (2) n'est pas admissible et ne peut donc pas être une solution optimale.

FIGURE 3 Influence de *k* sur la région admissible : cas où *k* > 200



Le cas limite où le point B" cesse d'être admissible est atteint lorsque les droites associées aux contraintes (21), (2) et (3) se rencontrent au point P du graphique de droite de la figure 3. Comme P est situé à l'intersection des droites associées à (2) et (3), ses coordonnées x_1 et x_2 satisfont aux équations

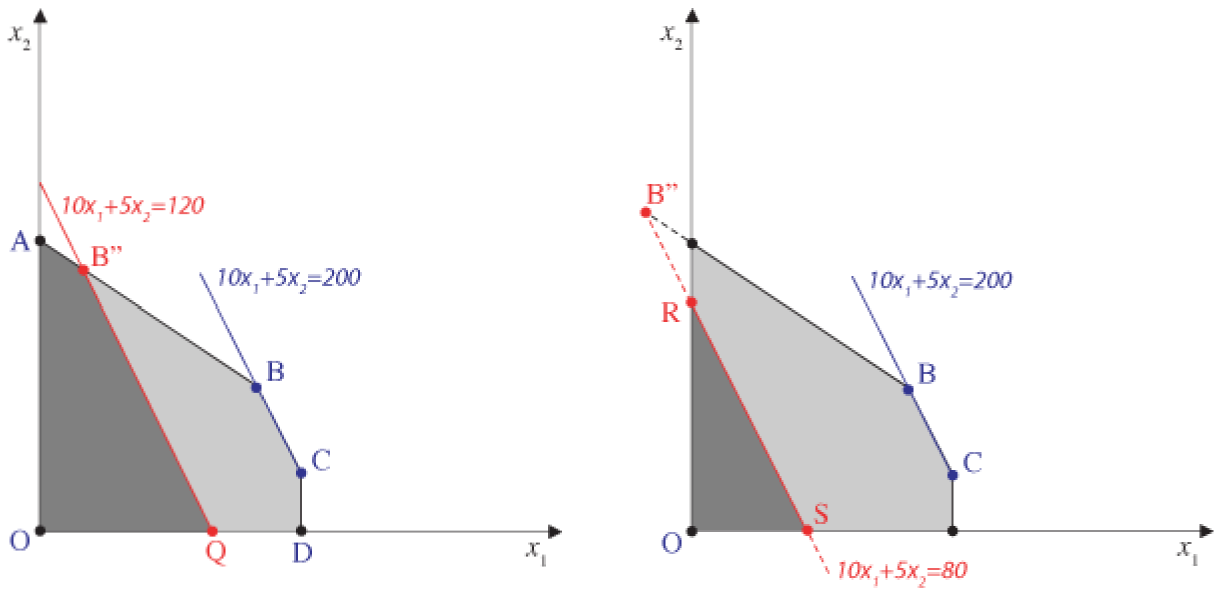
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \;=\; 60 \quad \text{et} \quad x_1 \;=\; 18.$$

Il en résulte que P = (18; 8). Enfin, puisque P appartient également à la droite associée à (21),

$$k \;=\; (10 \times 18) + (5 \times 8) \;=\; 220.$$

La figure 4 traite du cas où $0 < k < 200$. Dans le graphique de gauche, qui correspond à la valeur $k = 120$, l'optimum de (FRB") est atteint au sommet B" = (3; 18), intersection des droites associées aux contraintes (21) et (2). Par contre, dans le graphique de droite, où $k = 80$, le point B" ne peut être une solution optimale, car sa 1re coordonnée est négative; l'optimum de ce modèle (FRB") est atteint au sommet R = (0; 16).

FIGURE 4 Influence de *k* sur la région admissible : cas où 0 < *k* < 200



Le cas limite où le point B" cesse d'être admissible est atteint lorsque les droites associées aux contraintes (21) et (2) se rencontrent au point A = (0; 20) situé sur l'axe vertical. Ce cas correspond à la valeur k = 100 : en effet, puisque A appartient alors à la droite associée à la contrainte (21), ses coordonnées satisfont à l'équation définissant cette droite et

$$k \;=\; 10\,x_1 + 5\,x_2 \;=\; (10 \times 0) + (5 \times 20) \;=\; 100.$$

Approche algébrique

D'après les calculs de nature géométrique qui précèdent, l'optimum de (FRB") est situé à l'intersection des droites associées aux contraintes (21) et (2), pourvu que le membre droit de (21) appartienne à l'intervalle [100; 220]. Nous indiquons maintenant comment retrouver ce résultat à partir de considérations purement algébriques. L'avantage de cette 2e approche est qu'elle s'adapte sans problème à des modèles linéaires comportant plus de deux variables de décision.

Comme dans le cas des coefficients c_j traité dans l'article 3E.1, le calcul algébrique des intervalles de variation des membres droits b_i utilise un paramètre Δ représentant la modification apportée au membre droit considéré. Le modèle (FRB") analysé ici s'obtiendra donc de (FRB) en remplaçant (1) par

$$10\,x_1 + 5\,x_2 \;\leq\; 200 + \Delta. \tag{22}$$

Écrivons les modèles (FRB) et (FRB") sous forme d'équations en introduisant les variables d'écart requises. D'abord (FRB) :

$$\text{Max } z = 1000\,x_1 + 1200\,x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & e_1 & & & & & & & = & 200 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & e_2 & & & & & = & 60 \\ x_1 & & & & & & & + & e_3 & & & = & 18 \\ & & x_2 & & & & & & & + & e_4 & = & 30 \end{array} \qquad \text{(FRB=)}$$

$$x_1\,,\; x_2\,,\; e_1\,,\; e_2\,,\; e_3\,,\; e_4 \;\geq\; 0.$$

Et voici le modèle (FRB") sous forme d'équations :

$$\text{Max } z = 1000\,x_1 + 1200\,x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrclcl} 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & e_1 & & & & & & & = & 200 & + & \Delta \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & e_2 & & & & & = & 60 & & \\ x_1 & & & & & & & + & e_3 & & & = & 18 & & \\ & & x_2 & & & & & & & + & e_4 & = & 30 & & \end{array} \qquad \text{(FRB"=)}$$

$$x_1\,,\; x_2\,,\; e_1\,,\; e_2\,,\; e_3\,,\; e_4 \;\geq\; 0.$$

Notons que les deux modèles coïncident, sauf que le second contient une «colonne Δ». De plus, cette «colonne Δ» est identique à la colonne de la variable d'écart e_1. On montre facilement, en considérant une à une les diverses opérations constituant un pivotage, que cette propriété est conservée d'une itération à l'autre, pourvu que les termes impliquant la variable d'écart e_1 restent dans les membres gauches des équations[2]. Il en résulte que cette propriété se vérifie également dans le lexique optimal. Par conséquent, on obtient un «lexique» de (FRB") en ajoutant au lexique (7) – (12) de (FRB) une «colonne Δ» identique à la colonne de e_1, mais avec des signes inversés puisque les termes impliquant la variable e_1 sont placés dans les membres droits :

$$\text{Max } z = 27\,000 - 30\,e_1 - 350\,e_2 \qquad (23)$$

sous les contraintes :

[2] Le fait de placer, dans un lexique, les variables de base à gauche du symbole d'égalité et les variables hors base à sa droite est une convention commode, et non une nécessité mathématique. On pourrait reprendre la description de l'algorithme du simplexe en maintenant les six variables x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 et e_4 dans les membres gauches. Le seul inconvénient, c'est que l'algorithme deviendrait moins intuitif, moins simple à comprendre. D'ailleurs, les manuels de la recherche opérationnelle ont traditionnellement présenté l'algorithme sous cette forme.

$$x_1 \;=\; 15 + 0{,}15\,\Delta - 0{,}15\,e_1 + 0{,}25\,e_2 \tag{24}$$

$$x_2 \;=\; 10 - 0{,}10\,\Delta + 0{,}10\,e_1 - 0{,}50\,e_2 \tag{25}$$

$$e_3 \;=\; 3 - 0{,}15\,\Delta + 0{,}15\,e_1 - 0{,}25\,e_2 \tag{26}$$

$$e_4 \;=\; 20 + 0{,}10\,\Delta - 0{,}10\,e_1 + 0{,}50\,e_2 \tag{27}$$

$$x_1,\; x_2,\; e_1,\; e_2,\; e_3,\; e_4 \;\geq\; 0. \tag{28}$$

Le critère d'optimalité est nécessairement satisfait dans l'objectif (23). Cependant, la solution de base associée est admissible si et seulement si les membres droits sont non négatifs lorsqu'on annule les variables hors base e_1 et e_2. Autrement dit, on obtient une solution optimale de (FRB") quand

$$15 + 0{,}15\,\Delta \geq 0 \quad \text{et} \quad 10 - 0{,}10\,\Delta \geq 0 \quad \text{et} \quad 3 - 0{,}15\,\Delta \geq 0 \quad \text{et} \quad 20 + 0{,}10\,\Delta \geq 0.$$

Pour résoudre cet ensemble de 4 conditions, nous les traitons d'abord une à une.

- $x_1 \geq 0$: $15 + 0{,}15\,\Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \geq -15 / 0{,}15 = -100$
- $x_2 \geq 0$: $10 - 0{,}10\,\Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \leq 10 / 0{,}10 = 100$
- $e_3 \geq 0$: $3 - 0{,}15\,\Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \leq 3 / 0{,}15 = 20$
- $e_4 \geq 0$: $20 + 0{,}10\,\Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \geq -20 / 0{,}10 = -200$.

En résumé, la solution de base associée au «lexique» est admissible – et alors automatiquement optimale – si et seulement si $-100 \leq \Delta \leq 20$. Exprimé en termes du membre droit de (22), cette dernière condition signifie que $100 \leq 200 + \Delta \leq 220$. Par conséquent, l'intervalle de variation du membre droit de la 1re contrainte technologique est $[100; 220]$ et on retrouve le résultat obtenu précédemment à partir de considérations géométriques.

3E.3 Analyse de scénarios en présence d'un lexique optimal : Kalinine

Pour notre premier exemple, nous reprenons le contexte de l'exercice de révision no 1 de la section 2.1. La maison Kalinine vient de lancer un article de confection, la roubachka russe, qui a toute la faveur des amateurs de jeans et de rock. La maison Kalinine en confectionne quatre modèles, qui se distinguent les uns des autres par la finesse du tissu utilisé, l'élaboration du travail de broderie, la qualité des coutures et la beauté de l'emballage. Les données relatives à la confection de ces roubachki (pluriel de roubachka) sont présentées dans les deux tableaux ci-dessous.

Durée (en min/u) des opérations de fabrication				
Atelier	**La Cosaque**	**L'Ukrainienne**	**La Slavonne**	**La Tatare**
Coupe	5	8	6	8
Couture	10	8	7	6
Broderie	20	15	10	25
Emballage	5	6	5	4
Coûts de fabrication et prix de vente unitaires				
Main-d'oeuvre	7,50 $	8,00 $	6,50 $	8,00 $
Fournitures	15,00 $	12,00 $	8,00 $	10,00 $
Emballage	2,00 $	1,50 $	1,00 $	$ 1,50 $
Prix de vente	44,50 $	45,50 $	39,50 $	49,50 $

Kalinine : Main-d'oeuvre disponible (en minutes) dans chaque atelier le mois prochain				
Atelier	Coupe	Couture	Broderie	Emballage
Disponibilité	21 000	33 000	50 000	25 000

La demande pour chacun des quatre modèles est jusqu'à présent supérieure à la capacité de production de Kalinine. Le carnet de commandes forcera Kalinine à fabriquer le mois prochain au moins 1 000 roubachki L'Ukrainienne et au moins 1 300 roubachki La Slavonne.

La direction de Kalinine utilise pour planifier ses opérations le modèle linéaire continu suivant, noté (P) ci-après.

$$\text{Max } z = 20\, x_C + 24\, x_U + 24\, x_S + 30\, x_T$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{ll}
\text{Disp. Coupe} & 5\, x_C + 8\, x_U + 6\, x_S + 8\, x_T \leq 21\,000 \\
\text{Disp. Couture} & 10\, x_C + 8\, x_U + 7\, x_S + 6 \text{ x } x_T \leq 33\,000 \\
\text{Disp. Broderie} & 20\, x_C + 15\, x_U + 10\, x_S + 25\, x_T \leq 50\,000 \\
\text{Disp. Emballage} & 5\, x_C + 6\, x_U + 5\, x_S + 4\, x_T \leq 25\,000 \\
\text{Carnet Ukraine} & x_U \geq 1\,000 \\
\text{Carnet Slavonne} & x_S \geq 1\,300 \\
 & x_C\,,\; x_U\,, x_S\,,\; x_T \;\geq\; 0,
\end{array}$$

où x_J représente le nombre de roubachki du modèle J fabriquées et vendues le mois prochain, avec J = C (La Cosaque), U (L'Ukrainienne), S (La Slavonne) et T (La Tatare). L'intégrité des variables sera prise en compte lors de l'interprétation des résultats. Voici un lexique optimal.

$$\text{Max } z = 76\,000 - 2\, x_T - 4\, e_1 - 8\, e_5 - 0\, e_6$$

sous les contraintes :

$$x_C \;=\; 1040 \;-\; 1{,}6\, x_T \;-\; 0{,}2\, e_1 \;-\; 1{,}6\, e_5 \;-\; 1{,}2\, e_6$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
e_2 & = & 5500 & + & 10\,x_T & + & 2\,e_1 & + & 8\,e_5 & + & 5\,e_6 \\
e_3 & = & 1200 & + & 7\,x_T & + & 4\,e_1 & + & 17\,e_5 & + & 14\,e_6 \\
e_4 & = & 7300 & + & 4\,x_T & + & e_1 & + & 2\,e_5 & + & e_6 \\
x_U & = & 1000 & & & & & + & e_5 & & \\
x_S & = & 1300 & & & & & & & + & e_6
\end{array}
$$

$$x_C\,,\ x_U\,,\ x_S\,,x_T\,,\ e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,e_4\,,\ e_5\,,\ e_6\ \geq\ 0.$$

D’après ce lexique, le profit optimal est de 76 000 dollars et peut s'obtenir en fabriquant 1040 roubachki La Cosaque, 1000 L'Ukrainienne, 1300 La Slavonne et aucune La Tatare. Mais, il existe d'autres plans de production optimaux puisque le coût marginal de la variable hors base e_6 est nul : il suffit de donner à e_6 une valeur positive inférieure à 1040/1,2 = 866,7 puis de calculer les valeurs des variables de base à l'aide du lexique. Par exemple, en posant e_6 = 100 et en annulant les trois autres variables hors base, on obtient un autre plan optimal où

$$x_C = 1040 - (1{,}2 \times 100) = 920 \quad \text{et} \quad x_U = 1000 \quad \text{et} \quad x_S = 1300 + 100 = 1400 \quad \text{et} \quad x_T = 0.$$

Noter qu’il faut prendre pour valeur de e_6 un nombre entier multiple de 5, de façon à ce que la variable de base x_C prenne une valeur entière.

Nous considérons maintenant divers scénarios qui pourraient intéresser les gestionnaires de Kalinine.

Scénario 1. La direction de Kalinine songe à augmenter de 2$ le prix de vente de L'Ukrainienne. Quel serait alors le plan de production optimal? Quel profit l'entreprise en retirerait-elle?

La fonction-objectif deviendrait

$$z' \;=\; 20\,x_C + 26\,x_U + 24\,x_S + 30\,x_T \;=\; z + 2\,x_U.$$

Exprimons z' en fonction des variables hors base du lexique :

$$z' \;=\; 76\,000 - 2\,x_T - 4\,e_1 - 8\,e_5 - 0\,e_6 + 2\,(1000 + e_5) \;=\; 78\,000 - 2\,x_T - 4\,e_1 - 6\,e_5 - 0\,e_6.$$

La solution de base associée au lexique est optimale pour z' également puisque les profits marginaux des variables hors base demeurent tous non positifs.

Le plan optimal consisterait toujours à fabriquer 1040 roubachki La Cosaque, 1000 L'Ukrainienne, 1300 La Slavonne et aucune La Tatare. Le profit optimal augmenterait de 2×1000 = 2000 dollars, pour s'établir à 78 000 $.

Scénario 2. La réponse au scénario précédent a suscité la question suivante : de combien pourrait-on augmenter le prix de vente de L'Ukrainienne sans modifier le plan optimal de production?

Notons Δ l'augmentation du prix de vente de L'Ukrainienne. Cette augmentation se réflète directement sur la marge unitaire du modèle et la fonction-objectif s'écrit :

$$z' = z + \Delta\, x_U, \qquad \text{où } \Delta \geq 0.$$

Exprimons z' en fonction des variables hors base du lexique :

$$\begin{aligned} z' &= 76\,000 - 2\,x_T - 4\,e_1 - 8\,e_5 - 0\,e_6 + \Delta\,(1000 + e_5) \\ &= (76\,000 + 1000\,\Delta) - 2\,x_T - 4\,e_1 - (8-\Delta)\,e_5 - 0\,e_6. \end{aligned}$$

La solution de base associée au lexique est optimale pour z' également pourvu que le coefficient de e_5 soit non positif, c'est-à-dire pourvu que $\Delta \leq 8$. Ainsi, le plan optimal de production ne serait pas modifié si le prix de vente de L'Ukrainienne était augmenté de 8 dollars ou moins.

Scénario 3. Le plan de production associé au lexique final propose de ne fabriquer aucune roubachka La Tatare. À partir de quel prix de vente deviendrait-il rentable pour Kalinine de produire ce modèle?

Selon le lexique, fabriquer une roubachka La Tatare entraînerait, aux prix actuels, un manque à gagner de 2 $. Il deviendrait rentable pour Kalinine de produire ce modèle si le coefficient de x_T dans la fonction-objectif augmentait de 2, autrement dit si le prix de vente de La Tatare était porté à 51,50 $.

Scénario 4. La main-d'oeuvre de l'atelier de coupe n'est pas suffisante pour permettre l'exploitation complète des ressources disponibles dans les autres ateliers. Kalinine décide de louer du temps de coupe chez un concurrent. Combien devrait-on en louer? Quel taux horaire maximal serait-on prêt à verser pour ce temps supplémentaire?

Louer des minutes de coupe revient à remplacer la 1[re] contrainte technologique par

$$5\,x_C + 8\,x_U + 6\,x_S + 8\,x_T \leq 21000 + \Delta,$$

où $\Delta \geq 0$ représente le nombre de minutes louées chez le concurrent. Le lexique initial se verra donc adjoindre une colonne Δ identique, au signe près, à celle associée à la variable d'écart e_1. Il en sera de même dans le lexique final, qui s'écrira sous la forme suivante.

Max $z = 76\,000 - 2\,x_T - 4\,e_1 - 8\,e_5 - 0\,e_6$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_C & = & 1040 & + & 0{,}2\,\Delta & - & 1{,}6\,x_T & - & 0{,}2\,e_1 & - & 1{,}6\,e_5 & - & 1{,}2\,e_6 \\ e_2 & = & 5500 & - & 2\,\Delta & + & 10\,x_T & + & 2\,e_1 & + & 8\,e_5 & + & 5\,e_6 \\ e_3 & = & 1200 & - & 4\,\Delta & + & 7\,x_T & + & 4\,e_1 & + & 17\,e_5 & + & 14\,e_6 \\ e_4 & = & 7300 & - & \Delta & + & 4\,x_T & + & e_1 & + & 2\,e_5 & + & e_6 \\ x_U & = & 1000 & & & & & & & + & e_5 & & \\ x_S & = & 1300 & & & & & & & & & + & e_6 \end{array}$$

$$x_C,\ x_U,\ x_S,\ x_T,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6 \geq 0.$$

Il faut choisir Δ de sorte que chaque variable de base reste non négative. Les variables x_U et x_S ne sont pas affectées par la location de temps de coupe. Pour les autres, il faut résoudre les inéquations suivantes :

- $x_C \geq 0$: $1040 + 0{,}2\ \Delta \geq 0$ toujours vrai, car $\Delta \geq 0$
- $e_2 \geq 0$: $5500 - 2\ \Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \leq 5500 / 2 = 2750$
- $e_3 \geq 0$: $1200 - 4\ \Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \leq 1200 / 4 = 300$
- $e_4 \geq 0$: $7300 - \Delta \geq 0$ autrement dit $\Delta \leq 7300 / 1 = 7300$.

C'est la non-négativité de la variable e_3 qui limite le temps de location : Kalinine devrait louer au plus 300 minutes, soit 5 heures. (Ces heures permettraient d'augmenter de $0{,}2 \times 300 = 60$ unités la production des roubachki La Cosaque; la production des 3 autres modèles resterait inchangée; l'atelier de broderie serait alors utilisé à pleine capacité.)

Le taux maximal à payer pour la location de temps de coupe est de 4$ la minute, soit 240 $/h, en sus des coûts actuels de main-d'oeuvre dans cet atelier.

Scénario 5. La mise à pied d'ouvriers chez un concurrent permettrait à Kalinine d'augmenter le personnel de l'atelier d'emballage. Quel serait le nouveau plan de production si le temps disponible le mois prochain dans l'atelier d'emballage augmentait de 9600 minutes?

Il restera exactement le même puisque le temps disponible dans l'atelier d'emballage était déjà sous-utilisé. En effet, la variable d'écart e_4 prend la valeur 7300 dans le lexique optimal et, par conséquent, 7300 des 25 000 minutes disponibles à cet atelier ne sont pas utilisées par le plan optimal de production; en ajouter 9600 ne servirait évidemment à rien.

Scénario 6. L'un des détaillants qui écoulent les roubachki de Kalinine vient de noter une erreur dans sa dernière commande : il a demandé 100 roubachki et a spécifié le modèle L'Ukrainienne alors qu'en fait c'est le modèle La Slavonne qu'il voudrait recevoir. La maison Kalinine doit donc modifier son carnet de commandes fermes, révisant de 100 unités à la baisse la demande de L'Ukrainienne et de 100 unités à la hausse celle de La Slavonne. Quel est l'impact d'une telle révision sur le plan de production et sur le profit optimaux?

Pour traduire cette révision, nous récrivons les contraintes «Carnet Ukraine» et «Carnet Slavonne» sous la forme suivante :

$$x_U \geq 1000 - \Delta_5$$

$$x_S \geq 1300 \qquad - \Delta_6$$

où $\Delta_5 = 100$ et $\Delta_6 = -100$. Dans le modèle sous forme d'équations, la contrainte «Carnet Ukraine» s'écrit :

$$x_U - e_5 = 1000 - \Delta_5$$

et la colonne de Δ_5 est identique à celle de e_5 (c'est d'ailleurs pour obtenir cette propriété que nous avons exprimé la modification au carnet de commandes de L'Ukrainienne par un terme affecté d'un signe moins). Les colonnes de Δ_6 et de e_6 également sont identiques. Il en sera de même, au signe près, dans le «lexique» optimal, de sorte que les variables de base dans la solution associée se calculent de la façon suivante.

$$\begin{array}{lclllllll}
x_C & = & 1040 & + \; 1{,}6\,\Delta_5 & + \; 1{,}2\,\Delta_6 & = & 1040 + (1{,}6\times 100) + 1{,}2\times(-100) & = & 1080 \\
e_2 & = & 5500 & - \; 8\,\Delta_5 & - \; 5\,\Delta_6 & = & 5500 - (8\times 100) - 5\times(-100) & = & 5200 \\
e_3 & = & 1200 & - \; 17\,\Delta_5 & - \; 14\,\Delta_6 & = & 1200 - (17\times 100) - 14\times(-100) & = & 900 \\
e_4 & = & 7300 & - \; 2\,\Delta_5 & - \; \Delta_6 & = & 7300 - (2\times 100) - (-100) & = & 7200 \\
x_U & = & 1000 & - \; \Delta_5 & & = & 1000 - 100 & = & 900 \\
x_S & = & 1300 & & - \; \Delta_6 & = & 1300 - (-100) & = & 1400.
\end{array}$$

Puisque toutes les variables de base sont non négatives, l'impact de la révision sur le plan de production optimal peut être décrit à partir du lexique optimal du modèle (P) : aucune roubachka La Tatare ne sera fabriquée; la production de La Cosaque augmentera de 40 unités; pour les deux autres modèles, Kalinine ne fera que répondre aux commandes de son carnet. La révision entraînera une hausse de profit de 800 $:

$$z' = z + 8\,\Delta_5 + 0\,\Delta_6 = z + (8\times 100) + 0\times(-100) = z + 800.$$

3E.4 Analyse de scénarios en l'absence d'un lexique optimal : CinéFam

Une jeune entreprise, CinéFam, s'approvisionne en téléviseurs de deux types, A et B, auprès d'un grand manufacturier d'appareils électroniques. CinéFam lui verse 500 $ par appareil de type A et 575 $ par appareil de type B.

Les téléviseurs, qui sont destinés au cinéma familial, sont modifiés dans les ateliers de CinéFam, où ils sont dotés d'un transformateur et de deux enceintes acoustiques, avant d'être revendus sous la marque CINÉ. Dans le commerce, les pièces d'un transformateur coûtent 100 $ à CinéFam, alors que celles d'une enceinte acoustique lui reviennent à 60 $. Un des fournisseurs du manufacturier peut lui fournir des transformateurs déjà montés pour 120 $ chacun et des enceintes acoustiques déjà montées pour 70 $ chacune. Mais le manufacturier exerce des pressions sur le fournisseur pour restreindre ce genre de transactions qui favorisent, selon lui, le démarrage intempestif de petits concurrents. CinéFam sait que le fournisseur, soucieux de garder de bonnes relations avec le manufacturier, refusera de lui vendre plus de 100 transformateurs et plus de 200 enceintes pour la prochaine rafale.

Modifier un téléviseur chez CinéFam requiert 120 unités de production dans le cas d'un appareil de type A et 140 unités dans le cas d'un appareil de type B. CinéFam, qui doit également compter 10 unités de production pour assembler un transformateur et 10 unités pour assembler une enceinte acoustique, dispose de 28 000 unités de production pour la prochaine rafale.

CinéFam s'est engagée à livrer à ses détaillants au moins 180 CINÉ. De plus, il a été entendu que les appareils de type A compteraient pour au plus 80 % de la production de CINÉ de type B.

CinéFam éprouve présentement de sérieux problèmes de liquidités. Son propriétaire, qui souhaite minimiser le capital à investir dans la prochaine rafale, a construit un modèle linéaire continu pour analyser la situation. Voici les variables de décision utilisées :

TV*j* = nombre de téléviseurs de type *j* achetés $\qquad j$ = A, B

TA = nombre de transformateurs assemblés par CinéFam

TF = nombre de transformateurs achetés du fournisseur

EA = nombre d'enceintes assemblées par CinéFam

EF = nombre d'enceintes achetées du fournisseur.

Le modèle s'écrit :

Min z = 500 TVA + 575 TVB + 100 TA + 120 TF + 60 EA + 70 EF

sous les contraintes :

DISP PROD	120 TVA + 140 TVB + 10 TA + 10 EA ≤ 28 000
MAX TF	TF ≤ 100
MAX EF	EF ≤ 200
LIEN TV-T	TVA + TVB – TA – TF ≤ 0
LIEN TV-E	2 TVA + 2 TVB – EA – EF ≤ 0
DEMANDE	TVA + TVB ≥ 180
MAX A/B	TVA – 0,8 TVB ≤ 0
	TVA , TVB , TA , TF , EA , EF ≥ 0.

L'intégrité des variables sera prise en compte lors de l'interprétation des résultats. Le propriétaire a utilisé le solveur d'Excel pour résoudre ce modèle et a obtenu la solution optimale suivante, dont le coût est de 138 100 $:

TVA = 80	TVB = 100
TA = 180	TF = 0
EA = 260	EF = 100.

De plus, lorsque la boîte «Résultat du solveur» s'est affichée, il a sélectionné le rapport «Sensibilité». Voici le tableau obtenu : la section « Cellules variables » donne les intervalles de variation des coefficients c_j de la fonction-objectif et la section « Contraintes », les intervalles des membres droits des contraintes technologiques. Noter que le solveur d'Excel ne respecte pas l'ordre des contraintes; par exemple, la ligne associée au membre droit de « Max A / B » arrive en 1er lieu dans le tableau, alors qu'il s'agit de la 7e et dernière contrainte technologique du modèle.

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Valeur Marginale	Objectif Coefficient	Marge Supérieure	Marge Inférieure
B23	Valeur de TVA	80	0	500	95	2076,25
C23	Valeur de TVB	100	0	575	1E+30	95
D23	Valeur de TA	180	0	100	10	110
E23	Valeur de TF	0	10	120	1E+30	10
F23	Valeur de EA	260	0	60	10	10
G23	Valeur de EF	100	0	70	10	10

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Valeur Marginale	Contrainte à droite	Marge Supérieure	Marge Inférieure
H19	Max A / B M.G.	0	-52,778	0	90	90
H13	Disp Prod M.G.	28000	-1	28000	1000	1000
H18	Demande M.G.	180	922,778	180	6,207	6,207
H14	Max TF M.G.	0	0	100	1E+30	100
H15	Max EF M.G.	100	0	200	1E+30	100
H16	Lien TV-T M.G.	0	-110	0	100	100
H17	Lien TV-E M.G.	0	-70	0	100	100

Scénario 1. Le propriétaire croit que le fournisseur, sous l'influence du manufacturier, pourrait augmenter le prix qu'il exige pour ses enceintes. Quel serait le plan de production optimal si le prix d'une enceinte était fixé à 75 $, plutôt qu'à 70 $? Quels seraient alors les coûts totaux encourus par CinéFam ?

Selon la dernière ligne de la 1re section du tableau ci-dessus, l'intervalle de variation du coefficient c_j de la variable EF est [60; 80]. Comme la valeur considérée 75 appartient à cet intervalle, le plan optimal de production resterait le même. Mais, les coûts totaux augmenteraient à 138 600 dollars :

$$z' \ = \ z + 5\ \text{EF} \ = \ 138\,100 + (5 \times 100) \ = \ 138\,600.$$

Scénario 2. Le propriétaire a négocié avec un autre fournisseur et il croit qu'il pourrait obtenir des transformateurs à 111 $ l'unité. Que deviendraient le plan de production optimal et les coûts totaux s'il réussissait à s'entendre avec ce nouveau fournisseur et que son ancien fournisseur maintenait à 70 $ le prix unitaire des enceintes ?

La valeur 111 appartient à l'intervalle de variation [110; ∞[du coefficient c_j de la variable TF. Par conséquent, ni le plan optimal, ni les coûts totaux ne seraient affectés par ce changement :

$$z' = z - 9\ \text{TF} = 138\,100 - (9 \times 0) = 138\,100.$$

Scénario 3. Le propriétaire aimerait également savoir si le plan optimal serait affecté dans le cas où les deux changements évoqués aux scénarios 1 et 2, à savoir une augmentation de 5 $ du prix unitaire des enceintes et une diminution de 9 $ de celui des transformateurs, se concrétisaient en même temps.

Même si les deux valeurs considérées appartiennent aux intervalles de variation correspondants, nous ne pouvons répondre à la question avec les informations disponibles. Cependant, si on modifie le modèle Excel et que l'on réoptimise à l'aide du solveur, on obtient la solution optimale suivante, dont le coût est de 138 200 $:

TVA = 80	TVB = 100
TA = 80	TF = 100
EA = 360	EF = 0.

Noter que ce plan diffère de celui découlant du modèle originel.

Scénario 4. Le propriétaire craint que seulement 27 500 unités de production seront disponibles pour la prochaine rafale. Et il se demande si cette diminution de ses ressources l'amènerait à devoir acheter des transformateurs du fournisseur.

Selon la 1re ligne de la 2e section du tableau ci-dessus, l'intervalle de variation du membre droit de la contrainte « Disp Prod » est [27 000; 29 000]. Comme la valeur considérée 27 500 appartient à cet intervalle, nous pouvons conclure que le lexique optimal du modèle modifié s'obtient du lexique optimal du modèle originel et contient la même liste de variables de base. Par conséquent, à l'optimum, TF restera hors base et donc nulle.

Note. La valeur −1 affichée comme valeur marginale dans le tableau indique que resserrer unitairement l'exigence de la contrainte « Disp Prod », c'est-à-dire diminuer de 1 son membre droit, se traduit par une augmentation de 1 $ de la valeur optimale de *z*. Ainsi, les coûts totaux s'élèveraient à 138 600 $ selon ce scénario :

$$z' = z + 1\,(28\,000 - 27\,500) = 138\,100 + 500 = 138\,600.$$

Cependant, l'information fournie par le solveur d'Excel ne permet pas de déterminer le plan de production optimal associé. Pour le connaître, il faut soit disposer d'un lexique optimal comme dans l'article précédent, soit modifier le modèle et réoptimiser. À titre d'information, voici le plan optimal que l'on obtient :

TVA = 80	TVB = 100
TA = 180	TF = 0
EA = 210	EF = 150.

Scénario 5. Enfin, le propriétaire se demande ce qu'il adviendrait si les scénarios 1 et 4 se concrétisaient en même temps. Quelle information pourrait-on lui donner à partir des résultats fournis par le solveur d'Excel ?

Ici, on modifie un seul coefficient c_j et un seul membre droit. Comme les deux valeurs considérées appartiennent aux intervalles de variation correspondants, nous pouvons conclure que le lexique optimal du modèle modifié s'obtient du lexique optimal du modèle originel et contient la même liste de variables de base. Par conséquent, à l'optimum, TF restera hors base et donc nulle. Mais, on ne peut déterminer ni le plan de production optimal, ni les coûts totaux associés.

Note. Pour le plan de production optimal, il faut procéder comme dans la note du scénario 4. De plus, la valeur minimale de z' se calcule comme suit :

$$z' \;=\; z + 5\ \mathrm{EF} + 1\,(28\,000 - 27\,500) \;=\; 138\,100 + (5 \times 150) + 500 \;=\; 139\,350.$$

On notera que nous devons connaître la valeur de EF dans la solution optimale du modèle modifié pour obtenir la valeur optimale de z'.