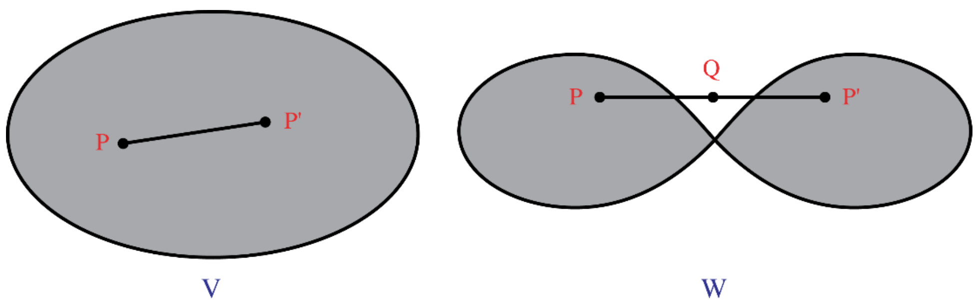
Annexe 3F. Segments de droite et combinaisons linéaires convexes

3F.1 Ensembles convexes

Un **ensemble** V est dit **convexe** si *tout* segment de droite dont les extrémités appartiennent à V est inclus tout entier dans V. Considérons les deux ensembles illustrés à la figure 1 ci-dessous. L'ensemble W à droite est non convexe, car les points P et P' de W sont les extrémités d'un segment dont au moins un point n'appartient pas à W. Par contre, l'ensemble V est convexe.

FIGURE 1 Définition graphique de la convexité



L'ensemble des solutions admissibles d'un modèle linéaire continu constitue toujours un ensemble convexe comme nous l'illustrons ci-dessous en section 4 à l'aide du modèle de la Fonderie Rivière-Bleue.

Nous aurons besoin, pour discuter de la notion de convexité, d'une version algébrique de la notion de segment de droite. Mais, auparavant, nous faisons quelques rappels sur les vecteurs.

3F.2 Vecteurs colonnes et opérations vectorielles

On définit un **vecteur colonne** de dimension n comme une suite de n nombres réels placés en colonne et enfermés entre des crochets. Voici, à titre d'exemples, des vecteurs colonnes de dimensions 2 et 4 respectivement :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

On peut additionner des vecteurs colonnes de même dimension, ou encore multiplier un vecteur colonne par un nombre réel – qualifié de **scalaire** dans un tel contexte. Voici comment procéder quand n = 2 :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,x \\ c\,y \end{bmatrix}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad 4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

3F.3 Représentation algébrique des points d'un segment de droite

Tout point Q du segment reliant P et P' peut s'écrire comme suit :

$$Q = \lambda P + (1-\lambda) P' \qquad \text{où } 0 \leq \lambda \leq 1. \qquad (1)$$

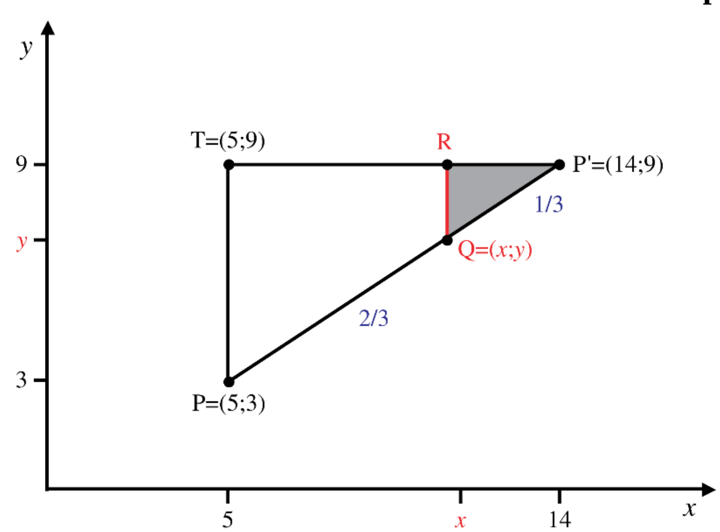
Pour illustrer la formule générale (1), considérons la figure 2, où le point Q est choisi de sorte que la longueur |QP'| du segment QP' est le tiers de celle du segment PP'. Nous indiquons d'abord comment déterminer géométriquement les coordonnées x et y de Q. Puisque les triangles PTP' et QRP' sont semblables, le rapport de 1 à 3 entre les longueurs des segments QP' et PP' est valide également entre les longueurs de RP' et TP', et entre celles de RQ et TP. Par conséquent :

- $|RP'| = ⅓\,|TP'| = ⅓\,(14 - 5) = 3$ et $x = 14 - 3 = 11$;
- $|RQ| = ⅓\,|TP| = ⅓\,(9 - 3) = 2$ et $y = 9 - 2 = 7$.

En résumé, Q = (11 ; 7). Il est possible de retrouver les coordonnées de Q en utilisant une expression de la forme (1). En effet,

$$⅓\,P + ⅔\,P' = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28/3 \\ 18/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/3 \\ 21/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

FIGURE 2 Combinaisons linéaires convexes dans un plan



Les expressions algébriques de la forme (1) sont appelées combinaisons linéaires convexes des points P et P'. Ces expressions représentent les points du segment reliant P et P'. De façon plus générale, soient P_1, P_2, …, P_k des points d'un plan cartésien. Une **combinaison linéaire convexe** de ces k points est une expression algébrique de la forme

$$R = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k \text{, où } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1 \text{ et } 0 \le \lambda_h \le 1 \text{ pour } h = 1, 2, \ldots, k.$$

Par exemple, R = (8 ; 8) est une combinaison linéaire convexe des points P = (5 ; 3), P' = (14 ; 9) et T = (5 ; 9) : en effet,

$$\tfrac{1}{6} P + \tfrac{1}{3} P' + \tfrac{1}{2} T = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 3/6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28/6 \\ 18/6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/6 \\ 27/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48/6 \\ 48/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Noter que

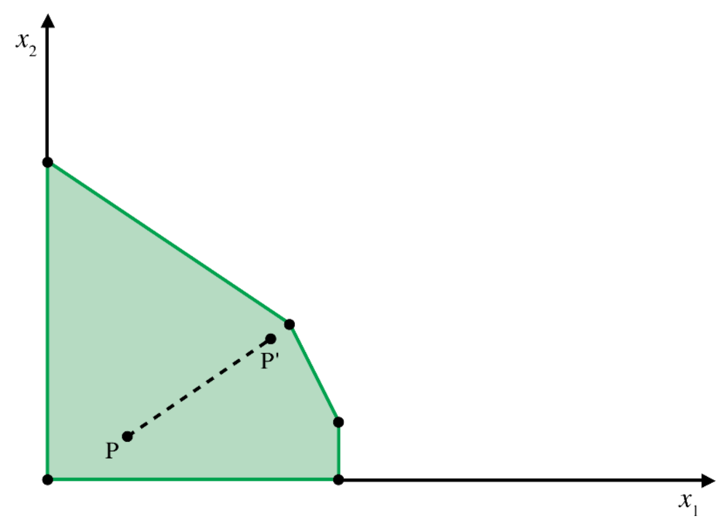
$$R = \tfrac{1}{2} T + \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{3} P + \tfrac{2}{3} P') = \tfrac{1}{2} T + \tfrac{1}{2} Q.$$

Ainsi, R est situé sur le segment reliant les points T et Q, ce qui signifie que R est un point intérieur du triangle «engendré» par P, P' et T.

3F.4 Convexité de la région admissible d’un modèle linéaire continu

L’ensemble des solutions admissibles d’un modèle linéaire **continu** constitue toujours un ensemble convexe. La figure 3, qui reproduit la région admissible *Adm* du modèle de la Fonderie Rivière-Bleue, illustre ce fait.

FIGURE 3 Convexité de la région admissible *Adm* de (FRB)



La validité générale de cette affirmation repose sur les trois observations suivantes.

1. La région admissible d’un modèle linéaire continu est l’intersection de demi-espaces fermés.
2. Un demi-espace fermé est un ensemble convexe.
3. L’intersection d’ensembles convexes est un ensemble convexe.

Nous commenterons brièvement ces trois points, en commençant par le second.

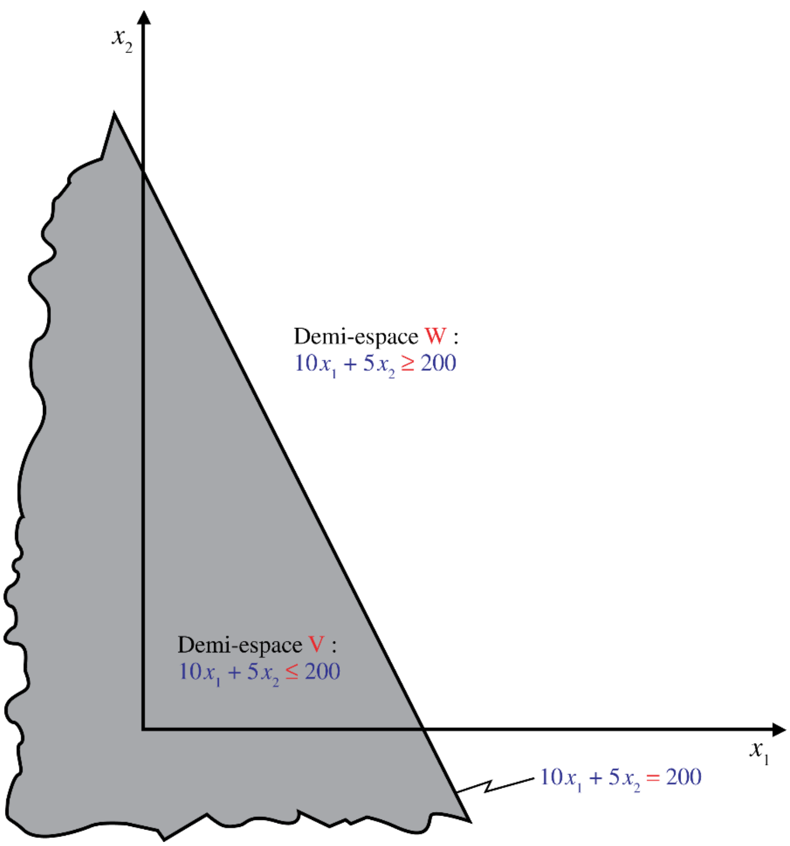
Commentaires sur le point 2.

Considérons la figure 4 ci-dessous et notons *d* la droite d'équation «10 x_1 + 5 x_2 = 200». Les points situés d'un côté de la droite *d* forment ce qu'on appelle un **demi-plan**, ou encore **demi-espace**. Un tel **demi-espace** est dit **fermé** ou **ouvert** selon que sa frontière en fait partie ou non. Par exemple, les demi-espaces V et W de la figure 4 sont fermés. Par contre, le demi-espace défini par

$$10\ x_1 + 5\ x_2 < 200$$

est ouvert, puisque les points de la droite-frontière *d* ne vérifient pas cette inéquation stricte. Il est immédiat que les demi-espaces V et W sont de ensembles convexes.

FIGURE 4 Demi-espaces associés à une inéquation



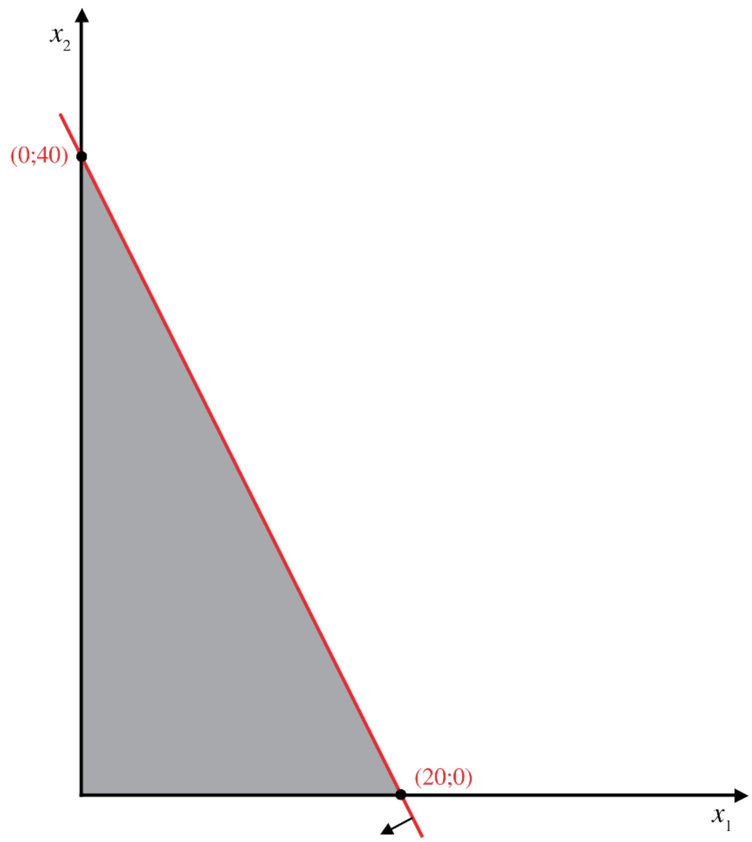
De même, dans un espace à trois dimensions, les points situés d'un côté d'un plan forment ce qu'on appelle un **demi-espace**. Cette notion s'étend aux espaces de dimension *n* quelconque, en introduisant la notion d'hyperplan qui généralise celle de plan.

Commentaires sur le point 1.

Considérons l'approche utilisée en section 3.1.3 pour construire la région admissible *Adm* du modèle (FRB). En un premier temps, nous avons affirmé que les contraintes de non-négativité fixent 0 comme borne inférieure des variables de décision x_1 et x_2 et ont pour effet de cantonner au premier quadrant la recherche des points admissibles. Or, le premier quadrant est l'intersection des demi-espaces fermés V_1 et V_2, où V_j est l'ensemble des points (x_1; x_2) dont la coordonnée n° j est non négative.

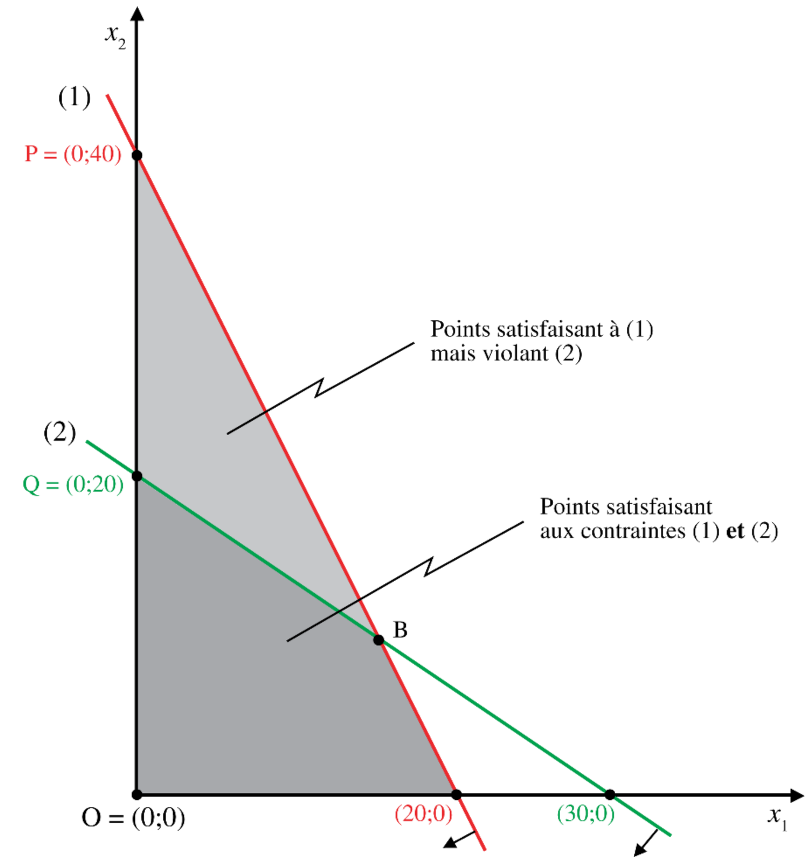
Ensuite, nous avons tracé la droite associée à la 1re contrainte technologique de (FRB) et avons déterminé graphiquement quels points du premier quadrant satisfont à cette contrainte. Selon la figure 5, qui reproduit la figure 3.3 du manuel, il s'agit des points du triangle – ombré dans la figure – qui est engendré par l'origine O = (0 ; 0) et par les points (0 ; 40) et (20 ; 0). Mais, ce triangle est l'intersection du premier quadrant et du demi-espace fermé W_1 formé des points (x_1; x_2) qui vérifient la 1re contrainte technologique.

FIGURE 5 (FRB) : solutions admissibles selon la 1re contrainte technologique



Puis, nous avons appliqué le même procédé à la 2e contrainte technologique et avons obtenu la figure 3.4, reproduite à la page suivante sous le numéro 6. Notre conclusion fut qu'il fallait conserver les points du polygone engendré par l'origine O et par les points A, B et (20 ; 0). Cette fois encore, on observe que ce polygone s'obtient également comme l'intersection du premier quadrant et des demi-espaces fermés W_1 et W_2, où W_2 est l'ensemble formé des points (x_1; x_2) qui vérifient la 2e contrainte technologique.

FIGURE 6 (FRB) : solutions admissibles selon les deux premières contraintes technologiques



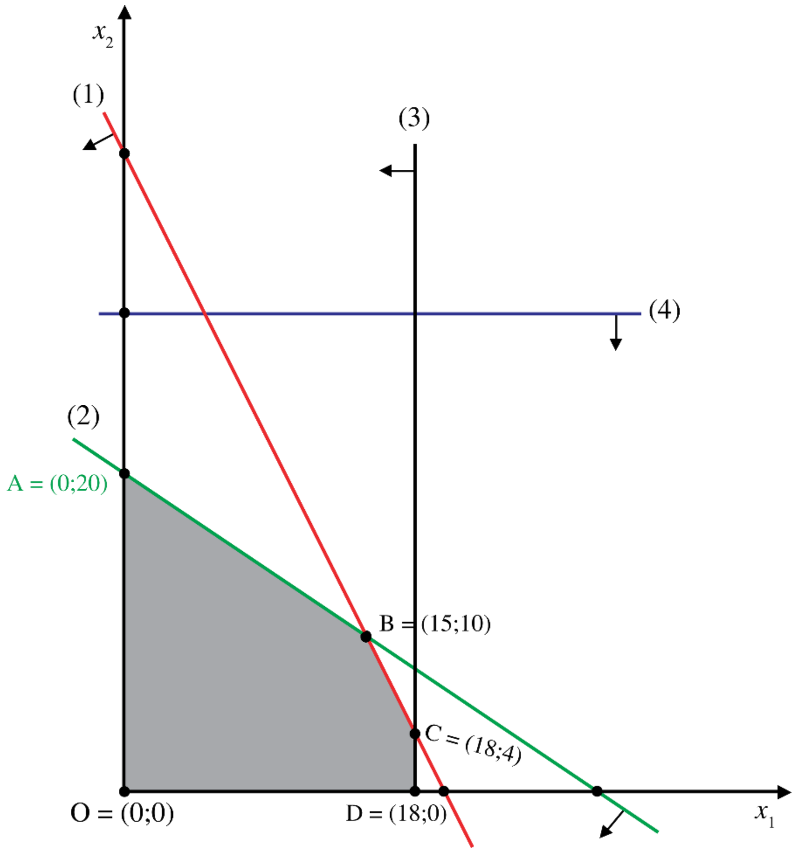
La procédure s'est poursuivie, en considérant tour à tour les contraintes numéros 3 et 4. La région admissible, une fois complètement déterminée, fut illustrée par la figure 3.6, reproduite à la page suivante sous le numéro 7. Il est immédiat que la région admissible OABCD s'obtient comme l'intersection du premier quadrant et des demi-espaces fermés W_1, W_2 W_3 et W_4, où W_i est l'ensemble formé des points (x_1; x_2) qui vérifient la contrainte technologique numéro i.

En résumé, à chacune des contraintes de signe « ≤ » ou « ≥ » correspond un demi-espace fermé constitué de l'ensemble des points qui la vérifient. Une contrainte de signe « = » peut être remplacée par la conjonction de deux inéquations, l'une de signe « ≤ », l'autre de signe « ≥ » ; l'ensemble des points qui satisfont à cette équation est donc l'intersection de deux demi-espaces fermés. Un point (x_1 ; x_2) vérifiant toutes les contraintes d'un modèle linéaire continu appartient donc à l'intersection d'un certain nombre de demi-espaces fermés.

Note. Dans le modèle (FRB), tout plan de production admissible s'exprime comme une somme pondérée des cinq plans de production correspondant aux points extrêmes, exécutés chacun dans une certaine proportion, la somme de ces proportions étant égale à 1. Ainsi, les plans de production F = (16 ; 8) et E = (8 ; 4) s'écrivent comme suit :

$$F = \tfrac{2}{3}\,B + \tfrac{1}{3}\,C \qquad \text{et} \qquad E = {}^{3}/_{6}\,O + {}^{2}/_{6}\,B + {}^{1}/_{6}\,C.$$

FIGURE 7 (FRB) : la région admissible



On remarquera que, dans les deux cas, les pondérations[1] des points extrêmes donnent 1 au total. Cette représentation d'un point admissible comme combinaison linéaire convexe des points extrêmes n'est pas unique en général. Par exemple, E = ($^1/_{45}$) (16 O + 9 A + 20 D). De façon générale, lorsque la région admissible est bornée, toute solution admissible (x_1 ; x_2 ; … ; x_n) s'écrit comme combinaison linéaire convexe des points extrêmes.

Commentaires sur le point 3.

Soit W, l'intersection d'ensembles convexes V_h. Et soient x et y, des éléments de W. Alors, x et y appartiennent à chacun des V_h. Comme ces ensembles convexes, le segment reliant x et y est inclus dans chacun des V_h, ce qui montre que le segment est inclus dans leur intersection W.

3F.5 Combinaisons linéaires convexes et points extrêmes

Les combinaisons linéaires convexes permettent également de donner une définition plus précise de la notion de point extrême. Un point (x_1 ; x_2 ; … ; x_n) appartenant à la région admissible d'un modèle linéaire continu est dit **point extrême** de cet ensemble si et seulement si il ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire convexe de deux *autres* points de cet ensemble.

---

[1] Les coefficients, ou pondérations, n'apparaissant pas explicitement sont nuls : par exemple,

$$E = {}^3/_6\,O + 0\,A + {}^2/_6\,B + {}^1/_6\,C + 0\,D.$$

Il est d'usage d'omettre les termes de coefficient nul, puisqu'ils n'affectent pas la somme.

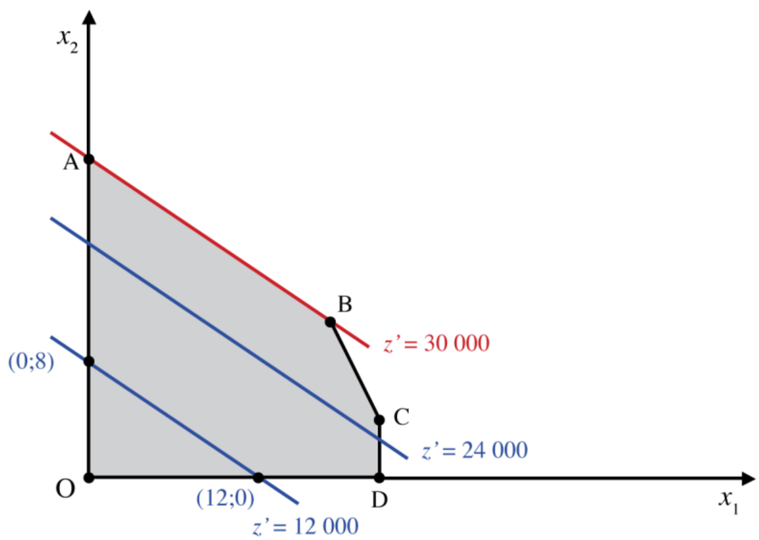
3F.6 Ensembles convexes et solutions multiples d'un modèle linéaire continu

Reprenons le modèle (FRB') de l'annexe 3D : rappelons que (FRB') est obtenu de (FRB) en fixant à 1500 $ la tonne le profit de la tuyauterie, plutôt que 1200 $/t. Les contraintes technologiques de (FRB) et de (FRB') sont identiques, de sorte que ces deux modèles admettent la même région admissible. Cependant, l'objectif de (FRB') s'écrit :

$$\text{Max } z' = 1\,000\, x_1 + 1\,500\, x_2. \tag{2}$$

La figure 8 indique clairement que le maximum de z' est atteint en tout point du segment reliant les sommets A et B de la région admissible. Mais comment se convaincre que les points du segment entre deux sommets optimaux sont eux-mêmes des solutions optimales quand le nombre de variables de décision dépasse 2 et qu'on ne dispose pas de représentation géométrique? Il est alors nécessaire de procéder algébriquement. Nous illustrons cette approche dans le cadre du modèle (FRB').

FIGURE 8 La région admissible du modèle (FRB')



Rappelons que tout point P du segment [A; B] s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{P} = \lambda\, \text{A} + (1 - \lambda)\, \text{B} \quad \text{où } 0 \leq \lambda \leq 1$$

ou encore

$$\text{P} = (15 - 15\lambda;\, 10 + 10\lambda) \quad \text{où } 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{3}$$

La fonction-objectif z' vaut bien 30 000 en tout point P défini par (3) puisque :

$$z' = 1000\,(15 - 15\lambda) + 1500\,(10 + 10\lambda) = 30\,000.$$

Les extrémités A et B du segment correspondent respectivement aux valeurs 1 et 0 du paramètre λ. Lorsque $0 < \lambda < 1$, la formule (3) donne un point P situé entre A et B, qui est optimal sans être un point extrême. Le théorème fondamental (voir section 3.2) n'interdit pas une telle situation; il stipule seulement qu'au moins une des solutions optimales est un point extrême.

Note. Dans l'annexe 3D, nous avons calculé la solution (3; 18; 80; 0; 15; 12) obtenue du lexique n° 1 de (FRB') lorsqu'on pose $x_1 = 3$. Cette solution correspond au point P du segment [A; B] où le paramètre λ

satisfait la condition suivante :

$$1 - \lambda \;=\; x_1 \,/\, limite \;=\; 3 \,/\, 15 \;=\; 0{,}2.$$

En substituant 0,8 à λ dans l'équation (3), on obtient le point P = (3; 18). Noter que (3; 18) n'est pas un point extrême, de même que le vecteur correspondant (3; 18; 80; 0; 15; 12) n'est pas une solution de base.

*3F.7 Modèle linéaire associé à un modèle linéaire par parties

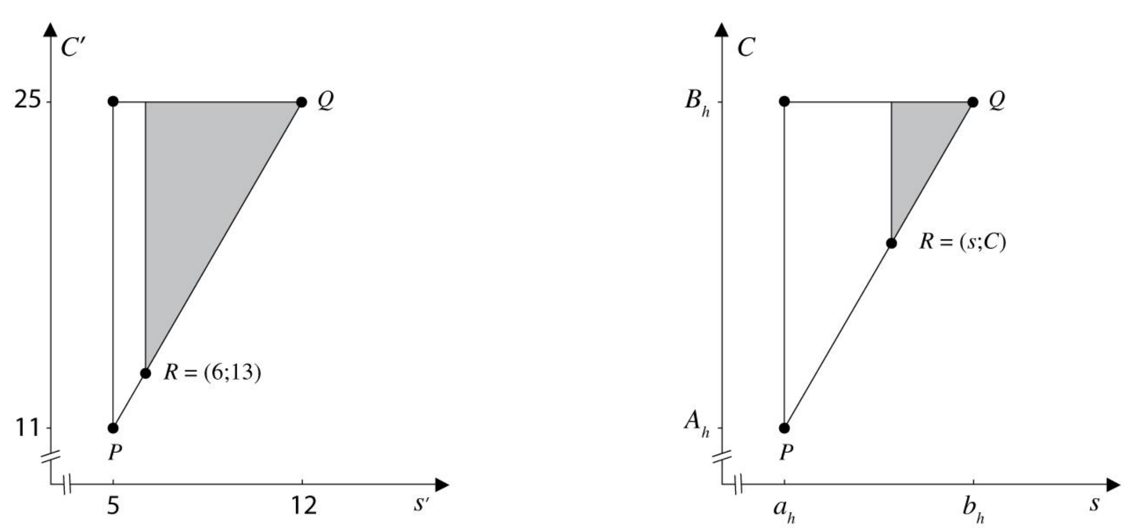
Nous avons construit en section 2.3.6 un modèle linéaire mixte pour traiter un problème où apparaît une fonction linéaire par parties. L'approche utilisée repose implicitement sur la notion de combinaison linéaire convexe. Nous désirons ici expliciter le rôle de cette notion.

Rappelons que le coût C ne dépend pas linéairement de la quantité s de céréale A que le meunier se procurera auprès du fournisseur, car le coût d'un kilo additionnel baisse à partir de 5 000 et diminue encore après 12 000. Pour inclure la fonction C dans un modèle linéaire, nous utilisons une astuce qui consiste à d'abord définir un lien linéaire entre la quantité s et le coût C dans chacun des trois intervalles où le coût unitaire est fixe, puis à globaliser ce lien à l'aide de variables additionnelles v_h et t_h, où

$$\begin{array}{ll} v_h = 1 & \text{si } s \text{ appartient à l'intervalle numéro } h \\ v_h = t_h = 0 & \text{si } s \text{ n'appartient pas à l'intervalle numéro } h. \end{array} \qquad (4)$$

La valeur de t_h dans le 1er cas sera précisée ultérieurement. De plus, il n'est pas important pour notre propos que la valeur limite s = 5 000 soit placée dans le 1er ou dans le 2^{e} intervalle. Il suffira de s'assurer que 5000 appartienne à un et à un seul de ces intervalles. De même, 12 000, l'autre valeur où le coût d'un kilo additionnel change brusquement, sera indifféremment élément soit du 2^{e} intervalle, soit du 3^{e}, mais pas des deux.

FIGURE 9 Lien linéaire entre la quantité et le coût dans les intervalles n^{o} 2 et *h*



Nous commençons par le cas où s = 6 000 traité dans la section 2.3.6 (voir le graphique cartésien de gauche de la figure 9). Selon l'offre du fournisseur, le coût C de 6 000 kilos additionnels s'élève à 13 000 dollars :

$$C = (2{,}20 + 5\,000) + (2 + 1\,000) = 13\,000.$$

Puisque le coût est linéaire sur l'intervalle [5 000; 12 000], il s'obtient également de l'équation vectorielle suivante, où, pour alléger, nous avons exprimé les quantités en milliers de kilos et les coûts, en milliers de dollars (de sorte que $s' = s\,/\,1000$ et $C' = C\,/\,1000$) :

$$\begin{bmatrix} 6 \\ C' \end{bmatrix} = \tfrac{6}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 30+12 \\ 66+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Noter que le 2^{e} coefficient 1 / 7 de la formule (5) est égal au quotient |PR| / |PQ| dans le graphique cartésien de gauche de la figure 9, ou encore au quotient (6 – 5) / (12 – 5) des écarts entre les premières coordonnées des points P, Q et R.

Le graphique de droite illustre le cas général, lorsque la quantité s appartient à l'intervalle numéro h. Comme dans le manuel, a_h et b_h sont les bornes de l'intervalle numéro h; de plus, A_h et B_h dénotent les coûts associés à ces quantités. Par exemple,

$$b_1 = a_2 = 5\,000 \quad \text{et} \quad B_1 = A_2 = 11\,000.$$

Puisque le coût est linéaire sur l'intervalle numéro h, l'équation (1) s'applique et

$$\begin{bmatrix} s \\ C \end{bmatrix} = (1 - t_h)\begin{bmatrix} a_h \\ A_h \end{bmatrix} + t_h \begin{bmatrix} b_h \\ B_h \end{bmatrix},$$

où $t_h = |PR|\,/\,|PQ| = (s - a_h)\,/\,(b_h - a_h)$. Cette équation vectorielle résume les deux équations suivantes :

$$s = (1 - t_h)\, a_h + t_h\, b_h = a_h + (b_h - a_h)\, t_h \tag{6}$$

$$C = (1 - t_h)\, A_h + t_h\, B_h = A_h + (B_h - A_h)\, t_h. \tag{7}$$

L'astuce mentionnée précédemment consiste à réécrire s et C comme la somme de trois expressions de deux termes semblables à (6) et à (7), de sorte chaque expression soit associée à l'un des trois intervalles du domaine de la variable s et soit nulle lorsque s n'appartient pas à cet intervalle. Cette dernière propriété sera obtenue en multipliant les premiers termes de (6) et de (7) par la variable v_h :

$$s = a_h\, v_h + (b_h - a_h)\, t_h \tag{8}$$

$$C = A_h\, v_h + (B_h - A_h)\, t_h. \tag{9}$$

En effet, si s est élément de l'intervalle numéro h, (8) et (9) sont équivalentes à (6) et à (7) puisque $v_h = 1$ dans ce cas. Sinon, les membres droits de (8) et de (9) sont nuls en vertu de (4). Pour que la formule (8) s'applique à toutes les valeurs possibles de s, nous incluons dans le membre droit trois expressions semblables à celle de (8), une pour chacun des trois intervalles :

$$s = a_1\, v_1 + (b_1 - a_1)\, t_1 + a_2\, v_2 + (b_2 - a_2)\, t_2 + a_3\, v_3 + (b_3 - a_3)\, t_3.$$

Et nous procédons de même pour (9):

$$C = A_1\, v_1 + (B_1 - A_1)\, t_1 + A_2\, v_2 + (B_2 - A_2)\, t_2 + A_3\, v_3 + (B_3 - A_3)\, t_3.$$

Il reste à remplacer les paramètres a_h, b_h, A_h et B_h par leurs valeurs. Il résulte :

$$s = 1000\,[3\,v_1 + 2\,t_1 + 5\,v_2 + 7\,t_2 + 12\,v_3 + 6\,t_3] \tag{10}$$

$$C = 1000\,[6{,}6\,v_1 + 4{,}4\,t_1 + 11\,v_2 + 14\,t_2 + 25\,v_3 + 10{,}8\,t_3]. \tag{11}$$

Ces équations sont identiques aux formules (36) et (37) de la section 2.3.6, à l'ordre des termes près. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le coefficient de v_h dans (10) est la borne inférieure de l'intervalle numéro h; que celui de t_h est l'amplitude de ce même intervalle. Le même principe s'applique dans (11), mais aux valeurs de C.

Résumons le modèle utilisé pour traduire la 2^{e} situation considérée dans la section 2.3.6. Aux variables x_{Ij} (I = A, B et j = f, g) du modèle initial, on adjoint des variables s, C, v_h et t_h ($1 \le h \le 3$) définies de la façon suivante :

s = quantité (en kg) de céréale A achetée du fournisseur

C = coût (en dollars) de la céréale A achetée du fournisseur

$v_h = 1$ et $t_h = (s - a_h) / (b_h - a_h)$ si s appartient à l'intervalle numéro h

$v_h = t_h = 0$ sinon.

L'objectif du meunier consiste à maximiser ses revenus nets, après déduction du coût C payé au fournisseur :

$$\text{Max } z_2 = z_1 - C,$$

où z_1 est la fonction-objectif du modèle initial. Les contraintes technologiques forment trois groupes.

- La quantité de farine utilisée ne doit pas excéder ce qui est disponible et il faut respecter les proportions mentionnées dans l'énoncé du problème initial. Il s'agit de reprendre les inéquations (28) à (31) de la section 2.3.6, la première étant modifiée pour tenir compte des s kilos de céréale A provenant du fournisseur :
$$x_{\mathrm{Af}} + x_{\mathrm{Ag}} \le 8\,000 + s.$$
- Le coût C de la céréale A que le meunier se procure auprès du fournisseur est lié à la quantité s achetée : il s'agit d'introduire dans le modèle les équations (10) et (11) ci-dessus.
- Les variables v_h et t_h doivent être nulles lorsque s n'appartient pas à l'intervalle numéro h : il suffit d'ajouter les contraintes suivantes, qui apparaissent dans le manuel sous les numéros 34 et 35 :

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1$$

$$t_h \le v_h \qquad h = 1, 2, 3.$$