

# La notion de lexique : autres exemples

## 3G.1 Un problème de planification à trois produits

Dans cette annexe, nous donnons d'autres exemples de la notion d'amélioration marginale, notion qui joue un rôle central, non seulement dans l'algorithme du simplexe, mais dans plusieurs méthodes d'optimisation de la recherche opérationnelle.

Considérons de nouveau le problème de la Fonderie Rivière-Bleue. De manière à faire face à la concurrence, Aurèle décide de diversifier sa production en ajoutant un troisième produit à sa gamme. Il s'agit d'accessoires en fonte destinés aux poêles antiques, de plus en plus populaires auprès des citadins qui s'installent en grand nombre dans la région.

Selon les évaluations d'Aurèle, une tonne d'accessoires rapportera un profit de 900 \$, nécessitera 5 heures à l'atelier d'ébarbage et 2 heures à l'atelier de peinture. Aurèle estime qu'il ne pourra vendre plus de 25 tonnes de ces accessoires. Il veut, dans un premier temps, savoir si l'ajout de ce nouveau produit lui permettra d'augmenter son profit hebdomadaire, qui s'élève actuellement à 27 000 \$. Dans le modèle qui suit, la variable  $x_3$  représente le nombre de tonnes d'accessoires de poêle qui seront produites.

$$\text{Max } z' = 1\,000 x_1 + 1\,200 x_2 + 900 x_3 \quad (1)$$

sous les contraintes :

$$10 x_1 + 5 x_2 + 5 x_3 + e_1 = 200 \quad (2)$$

$$2 x_1 + 3 x_2 + 2 x_3 + e_2 = 60 \quad (3)$$

$$x_1 + e_3 = 18 \quad (\text{FRB3=}) \quad (4)$$

$$x_2 + e_4 = 30 \quad (5)$$

$$x_3 + e_5 = 25 \quad (6)$$

$$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0. \quad (7)$$

À ce stade-ci, le lecteur ne devrait avoir aucune difficulté à comprendre le modèle (FRB3=). Dans celui-ci,

- le terme  $5x_3$  de la contrainte (2) représente le temps alloué aux accessoires à l'atelier d'ébarbage ;
- le terme  $2x_3$  de la contrainte (3) représente le temps alloué aux accessoires à l'atelier de peinture ;

- la contrainte (6) limite à 25 tonnes la quantité du nouveau produit qui sera fabriquée ;
- enfin, la variable d'écart  $e_5$  représente l'écart entre la demande maximale du nouveau produit et la quantité qui sera fabriquée.

Le plan de production optimal actuel, sans les accessoires de poêle, consiste à fabriquer 15 tonnes de tuyauterie et 10 tonnes de gueuses. Il faut d'abord savoir s'il serait rentable de démarrer la production du nouveau produit – on déterminera ensuite la quantité optimale. Supposons qu'Aurèle décide de fabriquer 1 tonne d'accessoires. Comme le plan actuel épuise tout le temps disponible dans les deux ateliers, il lui faudra baisser la production de la tuyauterie ou celle des gueuses. Baisser de combien de tonnes ? On peut répondre à cette question par tâtonnement, mais ici encore, il est préférable de modéliser le problème à résoudre. Soit  $r_1$  et  $r_2$  les réductions (en tonnes) dans la production de la tuyauterie et des gueuses respectivement. La production de 1 tonne d'accessoires exige 5 heures à l'atelier d'ébarbage et 2 heures à celui de peinture. Les réductions  $r_1$  et  $r_2$  doivent compenser exactement ces heures, ce qui se traduit par les deux équations suivantes<sup>1</sup> :

$$10 r_1 + 5 r_2 = 5 \quad (8)$$

$$2 r_1 + 3 r_2 = 2. \quad (9)$$

L'équation (8) s'explique ainsi. Réduire de  $r_1$  tonnes la production de la tuyauterie entraîne une économie de  $10 r_1$  heures à l'atelier d'ébarbage. De même, en baissant de  $r_2$  tonnes la quantité de gueuses produites, on libère  $5 r_2$  heures dans ce même atelier. La diminution totale à l'atelier d'ébarbage, qui est de  $(10 r_1 + 5 r_2)$  heures, doit équilibrer les 5 heures requises pour fabriquer une tonne d'accessoires. On explique de façon similaire l'équation (9).

Nous laissons au lecteur le soin de résoudre le système d'équations (8)-(9). L'unique solution est  $r_1 = 0,25$  et  $r_2 = 0,50$  : ainsi, une réduction d'un quart de tonne dans la production de la tuyauterie et d'une demi-tonne dans celle des gueuses permet de produire exactement une tonne d'accessoires de poêle. Par conséquent, les réductions  $r_1$  et  $r_2$  requises pour fabriquer 1 tonne d'accessoires occasionnent au total un manque à gagner de  $(0,25 \times 1000) + (0,50 \times 1200) = 850$  dollars, tandis que cette même tonne d'accessoires rapporte un profit de 900 dollars. Il est donc rentable de produire les accessoires, car le gain unitaire net est de  $900 - 850 = 50$  dollars. L'algorithme du simplexe calcule automatiquement et rapidement de telles améliorations marginales. En utilisant cet algorithme pour résoudre le modèle (FRB3=), on obtient, après deux itérations<sup>2</sup>, le lexique suivant.

$$\text{Max } z' = 27000 - 30 e_1 - 350 e_2 + 50 x_3 \quad (10)$$

sous les contraintes :

$$x_1 = 15 - 0,15 e_1 + 0,25 e_2 - 0,25 x_3 \quad (11)$$

$$x_2 = 10 + 0,10 e_1 - 0,50 e_2 - 0,50 x_3 \quad (12)$$

$$e_3 = 3 + 0,15 e_1 - 0,25 e_2 + 0,25 x_3 \quad (\text{Lexique FRB3-2}) \quad (13)$$

$$e_4 = 20 - 0,10 e_1 + 0,50 e_2 + 0,50 x_3 \quad (14)$$

$$e_5 = 25 \quad - \quad x_3 \quad (15)$$

$$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0. \quad (16)$$

1. En général, les réductions doivent libérer **au moins** autant d'heures dans tous les ateliers que ce qui est requis par une unité du nouveau produit, et les conditions s'expriment comme des inéquations de signe « $\geq$ ». Mais à cause de la structure particulière du problème considéré, il est possible ici de trouver des réductions  $r_1$  et  $r_2$  qui satisfont aux conditions comme équations.

2. Ces deux itérations sont l'objet de l'exercice de révision 1(a).

À partir du lexique (FRB3-2), on déduit que :

- le plan de production associé à la solution de base (15; 10; 0; 0; 0; 3; 20; 25) n'est pas optimal pour  $z'$ , car au moins une variable hors base possède une amélioration marginale positive;
- il est rentable de fabriquer des accessoires, car l'amélioration marginale de la variable hors base  $x_3$  est +50 et on peut donner à  $x_3$  une valeur positive;
- les équations (11) et (12) indiquent que, si l'on augmente la variable  $x_3$  d'une unité tout en laissant nulles les autres variables hors base  $e_1$  et  $e_2$ , les variables de base  $x_1$  et  $x_2$  sont réduites de 0,25 et de 0,5 respectivement (on retrouve donc les réductions que nous avons calculées précédemment).

Nous avons prouvé par des arguments intuitifs la rentabilité des accessoires de poêle. Il faut, de plus, décider de la quantité à fabriquer de ce nouveau produit. Encore là, on pourrait répondre en effectuant des calculs manuels. Le lexique (FRB3-2) donne toutefois cette information indirectement : il suffit de considérer  $x_3$  comme variable entrante et d'effectuer le calcul de limite de la méthode du simplexe (voir p. 156, « *Choix d'une variable sortante* »). Le lecteur vérifiera que, lorsque  $e_1 = e_2 = 0$ , les limites de  $x_3$  à titre de variable entrante sont  $15/0,25 = 60$  d'après (11),  $10/0,5 = 20$  d'après (12) et  $25/1 = 25$  d'après (15). On en déduit que la variable  $x_3$  peut être augmentée jusqu'à la valeur 20, ce qui apportera un profit supplémentaire de  $(50 \times 20) = 1\,000$  dollars par rapport au plan optimal actuel. Le lexique (FRB3-2) indique également que, si l'on produit 20 tonnes d'accessoires de poêle, on devra produire  $(15 - 0,25 \times 20) = 10$  tonnes de tuyauterie et  $(10 - 0,5 \times 20) = 0$  tonne de gueuses. Le plan de production (10; 0; 20) rapporte un profit de  $27\,000 + (50 \times 20) = 28\,000$  dollars, ce qui peut se calculer directement ainsi :  $z = (1\,000 \times 10) + (0 \times 1\,200) + (900 \times 20)$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier si ce nouveau plan de production, incorporant les accessoires de poêle, est optimal. Il lui suffira d'effectuer les itérations requises de l'algorithme du simplexe à partir du Lexique (FRB3-2)<sup>3</sup>.

### 3G.2 Un problème de transport classique

Nous décrivons ici la notion d'amélioration marginale dans le contexte du problème de transport classique. Pour plus d'informations concernant ce problème, nous référons le lecteur à la section 5.3.1 et à l'annexe 5A, où sont présentés un modèle pour ce problème et un algorithme pour le résoudre. Le tableau 1 contient les données pertinentes à une instance du problème de transport classique, où des marchandises doivent être transportées à partir de deux usines, notées  $U_1$  et  $U_2$ , vers trois centres de distribution notés  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Il s'agit ici d'un problème de transport équilibré dans lequel la disponibilité totale des usines, soit 250 tonnes, est égale à la demande totale des centres de distribution. Les coûts de transport, dont on voudra minimiser le total, sont calculés à partir des coûts unitaires de transport fournis dans le tableau 1. Par exemple, chaque tonne transportée de l'usine  $U_1$  vers le centre  $C_2$  implique un débours de  $c_{12} = 6$  dollars.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Disponibilité
$U_1$	2	6	1	100
$U_2$	4	9	5	150
Demande	125	75	50	250

**TABLEAU 1**  
Problème de transport classique avec 2 usines et 3 centres

3. Voir l'exercice de révision 1(b).

Le modèle linéaire suivant, noté (PTC), représente le problème de transport classique décrit au tableau 1.

$$\text{Min } z = 2x_{11} + 6x_{12} + 1x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} \quad (17)$$

sous les contraintes :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \quad (18)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150 \quad (19)$$

$$x_{11} + x_{21} = 125 \quad (\text{PTC}) \quad (20)$$

$$x_{12} + x_{22} = 75 \quad (21)$$

$$x_{13} + x_{23} = 50 \quad (22)$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0. \quad (23)$$

Le lecteur doit se référer à l'annexe 5A pour plus de détails concernant ce type de modèle. Mentionnons seulement que :

- les variables  $x_{ij}$  représentent les quantités transportées des usines  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) vers les centres  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ );
- la fonction-objectif définie par (17) stipule que l'on cherche à minimiser le coût total de transport;
- les contraintes (18) et (19) exigent que les quantités de marchandises transportées à partir des usines soient égales à leurs disponibilités;
- de même, selon les équations (20) à (22), les quantités reçues par les centres seront égales à leurs demandes.

Un répartiteur expérimenté qui aurait comme tâche d'organiser le transport des marchandises pourrait, dans un premier temps, construire une solution admissible initiale à l'aide de la logique gourmande. Il lui suffirait essentiellement de donner priorité aux paires usine-centre dont le coût unitaire de transport est petit. Ainsi, puisque le coût unitaire de transport de  $U_1$  vers  $C_3$  est le plus bas du tableau 1, le répartiteur commencerait par planifier le transport de 50 tonnes de  $U_1$  à  $C_3$ . Cette approche gourmande est dite **méthode des coûts minimaux** (on en donne une description détaillée à la section 5A.4 de l'annexe 5A). La solution résultante, appelée solution MCM, est toujours une solution de base admissible. Le tableau 2 décrit la solution obtenue par la méthode des coûts minimaux pour le problème de transport classique associé aux données du tableau 1.

**TABLEAU 2**  
Solution MCM pour  
le problème avec  
2 usines et 3 centres

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Disponibilité
$U_1$	2 50	-1 6	1 50	100
$U_2$	4 75	9 75	+2 5	150
<b>Demande</b>	<b>125</b>	<b>75</b>	<b>50</b>	<b>250</b>

Chaque case ( $U_i; C_j$ ) du tableau 2 est divisée en trois parties. Dans la section inférieure, on retrouve la valeur de la variable  $x_{ij}$  dans la solution MCM. On observe que cette section inférieure est vide dans certaines cases. C'est que la variable  $x_{ij}$  correspondante est hors base,

et donc nulle, dans la solution MCM. La partie supérieure droite donne le coût unitaire de transport  $c_{ij}$  ; la partie supérieure gauche, l'amélioration marginale de la variable  $x_{ij}$ , notée  $\bar{c}_{ij}$ . On explique ci-après une façon simple de calculer ces améliorations marginales. On notera que les améliorations marginales des cases de base, qui sont nulles *a priori*, ne sont pas reportées dans le tableau.

Tel que mentionné ci-dessus, la première attribution de la méthode MCM consiste à allouer 50 tonnes à la case (1 ; 3). La deuxième case de plus petit coût est la case (1 ; 1), qui reçoit 50 tonnes. Une fois ces deux premières attributions effectuées, on doit attribuer 75 tonnes aux cases (2 ; 1) et (2 ; 2). La solution MCM correspond à la solution  $(x_{11}; x_{12}; x_{13}; x_{21}; x_{22}; x_{23}) = (50; 0; 50; 75; 75; 0)$ . Il s'agit d'une solution de base admissible pour le modèle (PTC).

La solution décrite au tableau 2 a été obtenue selon une procédure tout à fait raisonnable à première vue. Toutefois, un doute subsiste quant à la qualité de cette solution : on remarque en effet que 75 tonnes ont été allouées à la case dont le coût unitaire est le plus élevé. Un répartiteur expérimenté ferait instantanément cette observation et serait tenté d'utiliser plutôt, pour le transport des marchandises, les « routes » (1 ; 2) ou (2 ; 3). Commençons notre analyse avec la case (1 ; 2). Supposons que  $\Delta$  tonnes soient allouées à la case (1 ; 2) plutôt que 0 tonne. Il faut alors modifier les quantités allouées aux autres cases pour que la solution reste admissible. Le tableau 3 décrit une façon générique d'effectuer ces modifications afin d'obtenir de nouvelles solutions admissibles. Il y est proposé d'augmenter la valeur des variables  $x_{12}$  et  $x_{21}$  de  $\Delta$  unités, tout en réduisant de la même quantité les valeurs de  $x_{11}$  et de  $x_{22}$ . Pour chaque rangée du tableau 3, les modifications apportées aux valeurs des cases valent au total  $(+\Delta - \Delta) = 0$ . Ainsi, chaque valeur de  $\Delta$  conduit à une nouvelle solution admissible, pourvu que les variables  $x_{11}$  et  $x_{22}$  ne deviennent pas négatives, c'est-à-dire dans la mesure où  $\Delta \leq 50$ . En particulier, lorsque  $\Delta$  vaut 1, le changement dans le coût total  $z$  est égal à  $\bar{c}_{12} = 6 - 9 + 4 - 2 = -1$ . On retrouve donc l'amélioration marginale de la variable  $x_{12}$  reportée dans le tableau 2. Comme on le constate, les modifications décrites dans le tableau 3 conduisent à des solutions admissibles moins coûteuses que la solution du tableau 2, pourvu que  $\Delta \leq 50$ . On peut donc affirmer que la solution MCM n'est pas optimale.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Disponibilité						
$U_1$	<table border="1"> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>50 - \Delta</math></td> <td><math>\Delta</math></td> <td>50</td> </tr> </table>	2	6	1	$50 - \Delta$	$\Delta$	50			100
2	6	1								
$50 - \Delta$	$\Delta$	50								
$U_2$	<table border="1"> <tr> <td>4</td> <td>9</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td><math>75 + \Delta</math></td> <td><math>75 - \Delta</math></td> <td></td> </tr> </table>	4	9	5	$75 + \Delta$	$75 - \Delta$				150
4	9	5								
$75 + \Delta$	$75 - \Delta$									
<b>Demande</b>	<b>125</b>	<b>75</b>	<b>50</b>	<b>250</b>						

**TABEAU 3**  
Modification de la solution MCM à partir de la case (1 ; 2)

Le lexique suivant correspond à la solution de base<sup>4</sup> représentée dans le tableau 2.

4. On notera que le lexique comprend 4 équations et 4 variables de base, alors que le modèle (PTC) comporte 5 contraintes technologiques. Comme le modèle de transport classique est équilibré, chaque contrainte technologique est redondante en présence des autres : par exemple, si une solution satisfait aux équations (18) à (21), alors la quantité de marchandise transportée de  $U_2$  à  $C_3$  est égale à  $(100 + 150) - (125 + 75) = 50$ , ce qui signifie que (22) est satisfaite automatiquement. Par conséquent, l'une des équations (18) à (22) peut être enlevée sans affecter l'ensemble des solutions admissibles. On se retrouve donc avec un modèle comportant  $(2 + 3) - 1 = 4$  contraintes technologiques, dont les lexiques auront 4 variables de base.

$$\text{Min } z = 1\,125 - 1x_{12} + 2x_{23} \quad (24)$$

sous les contraintes :

$$x_{11} = 50 - 1x_{12} + 1x_{23} \quad (25)$$

$$x_{13} = 50 - 1x_{23} \quad (26)$$

$$x_{21} = 75 + 1x_{12} - 1x_{23} \quad (\text{Lexique PTC}) \quad (27)$$

$$x_{22} = 75 - 1x_{12} \quad (28)$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0. \quad (29)$$

La solution de base admissible  $(x_{11}; x_{12}; x_{13}; x_{21}; x_{22}; x_{23}) = (50; 0; 50; 75; 75; 0)$  associée au Lexique (PTC) est obtenue en posant  $x_{12} = x_{23} = 0$ . Nous terminons avec quelques commentaires :

- la solution de base MCM n'est pas optimale, car l'amélioration marginale de la variable  $x_{12}$  est négative, ce qui permet de réduire le coût total de transport, comme l'illustre le tableau 3 ;
- les améliorations marginales des variables  $x_{12}$  et  $x_{23}$  correspondent aux améliorations marginales des cases (1; 2) et (2; 3) respectivement, que nous avons calculées ci-dessus à l'aide d'un raisonnement intuitif ;
- si l'on pose  $x_{12} = 1$  et  $x_{23} = 0$ , alors  $x_{11}$  baisse d'une unité selon (25),  $x_{21}$  augmente d'une unité selon (27) et  $x_{22}$  baisse d'une unité selon (28), ce qui correspond aux modifications décrites dans le tableau 3 ;
- le Lexique (PTC) indique que l'amélioration marginale de la variable  $x_{23}$  vaut +2. Nous laissons au lecteur le soin de construire un tableau similaire au tableau 3 afin d'établir un schéma approprié de modifications lorsque  $x_{23} = 1$  et  $x_{12} = 0$ .

Dans l'exemple de la Fonderie Rivière-Bleue avec trois produits, comme dans l'exemple du problème de transport classique, nous avons montré comment on peut reproduire mathématiquement certains calculs manuels que le décideur pourrait vouloir effectuer. De tels calculs sont toutefois limités à des problèmes mettant en jeu un nombre restreint de variables. Un problème de transport classique de grande dimension ne pourrait certainement pas être résolu sans l'utilisation d'un ordinateur muni d'un algorithme approprié. Aujourd'hui, un ordinateur ne met que quelques secondes pour trouver une solution optimale d'un problème de transport classique comportant des milliers de lignes et de colonnes.

## Exercices de révision

### 1. L'adjonction d'un troisième produit chez FRB

Appliquer l'algorithme du simplexe au modèle (FRB3=) composé des formules (1) à (7).

- (a) Effectuer 2 itérations et comparer le système obtenu avec le modèle (FRB3-2).
- (b) Trouver le lexique optimal à partir du lexique (FRB3-2) obtenu à la question précédente.
- (c) Donner une solution optimale du modèle (FRB3=).

## 2. Un problème de transport classique

Considérer le problème de transport classique décrit au tableau suivant.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Disponibilité
$U_1$	3	2	1	15
$U_2$	7	4	6	13
Demande	8	10	10	28

Pour trouver une solution optimale de ce problème, il suffit, comme nous l'avons vu à la section 3G.2, de résoudre un modèle linéaire noté (PTC).

(a) Écrire le modèle linéaire (PTC).

(b) Le lexique suivant fournit une solution de base admissible du modèle (PTC).

$$\text{Min } z = 96 - 2x_{11} + 3x_{23}$$

sous les contraintes :

$$x_{12} = 5 - x_{11} + x_{23}$$

$$x_{13} = 10 - x_{23}$$

$$x_{21} = 8 - x_{11}$$

$$x_{22} = 5 + x_{11} - x_{23}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.$$

Exécuter une itération de l'algorithme du simplexe à partir du lexique précédent. Indiquer, en justifiant la réponse, si la solution obtenue est optimale.