4A Excel et la méthode SÉP

Quand on recourt à la méthode de séparation et d'évaluation progressive (SÉP) pour déterminer une solution optimale d'un modèle linéaire en nombres entiers, on doit souvent résoudre plusieurs modèles linéaires continus différents.

Dans cette section, nous indiquons comment utiliser le solveur d'EXCEL pour construire l'arbre d'énumération correspondant. Nous illustrerons notre propos à l'aide de l'exemple 1 (voir section 4.2.1, page 184). Voici le modèle linéaire (P) totalement en nombres entiers considéré :

$$\text{Max} \quad z = 10\,x_1 + 50\,x_2 \tag{5}$$

sous les contraintes :

$$-x_1 + 2\,x_2 \le 5 \tag{6}$$

$$x_1 + 2\,x_2 \le 14 \tag{7}$$

$$x_1 \le 8 \tag{8}$$

$$x_1,\; x_2 \ge 0 \tag{9}$$

$$x_1,\; x_2 \;\text{ entiers.} \tag{10}$$

La méthode SÉP a été appliquée à ce modèle, en utilisant le critère de la variable la plus distante pour choisir les variables de séparation. Les résultats obtenus sont résumés à la figure 1 (voir ci-après, page 2), qui donne l'**arbre d'énumération** de ce modèle.

La construction de l'arbre commence par la résolution de la relaxation continue (P_0) obtenue en omettant les contraintes d'intégrité (10). La figure 2 illustre la feuille de calcul P0 du fichier SÉP-Exm1.xlsx utilisée à cette fin. Noter que l'information donnée à la ligne 20 de cette figure réfère au modèle originel (P), et non à la relaxation continue (P_0) : en effet, le type « Ent » reporté dans la plage B20:C20 rappelle seulement que, dans (P), les variables x_1 et x_2 sont soumises à une contrainte d'intégrité. Les lignes 17 et 18 serviront à introduire les bornes imposées aux variables lors des séparations. Au départ, on retient des bornes par défaut qui seront respectées par toute solution admissible[1] :

- comme borne inférieure, on prend 0 dans tous les cas, car toutes les variables sont supposées non négatives;
- la 1re coordonnée x_1 d'une solution admissible (x_1 ; x_2) ne peut excéder 8 en vertu de l'inéquation (8); de même, la contrainte (7) et la non-négativité de x_1 garantissent que $x_2 \le 7$.

---

[1] Il est facile de trouver des bornes supérieures dès que le modèle contient au moins une contrainte de signe ≤ dont tous les coefficients sont positifs. Par exemple, 24 peut servir de borne supérieure commune aux 4 coordonnées d'une solution (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4) satisfaisant à « $2\,x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 + 4\,x_4 \le 48$ ». De façon générale, si l'une des contraintes technologiques est de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \le b \qquad \text{où } a_1, a_2, \ldots, a_n, b > 0,$$

on obtient une borne supérieure commune M en posant : $M = \max\{b/a_1 ; b/a_2 ; \ldots ; b/a_n\}$.

Figure 1 Arbre d'énumération

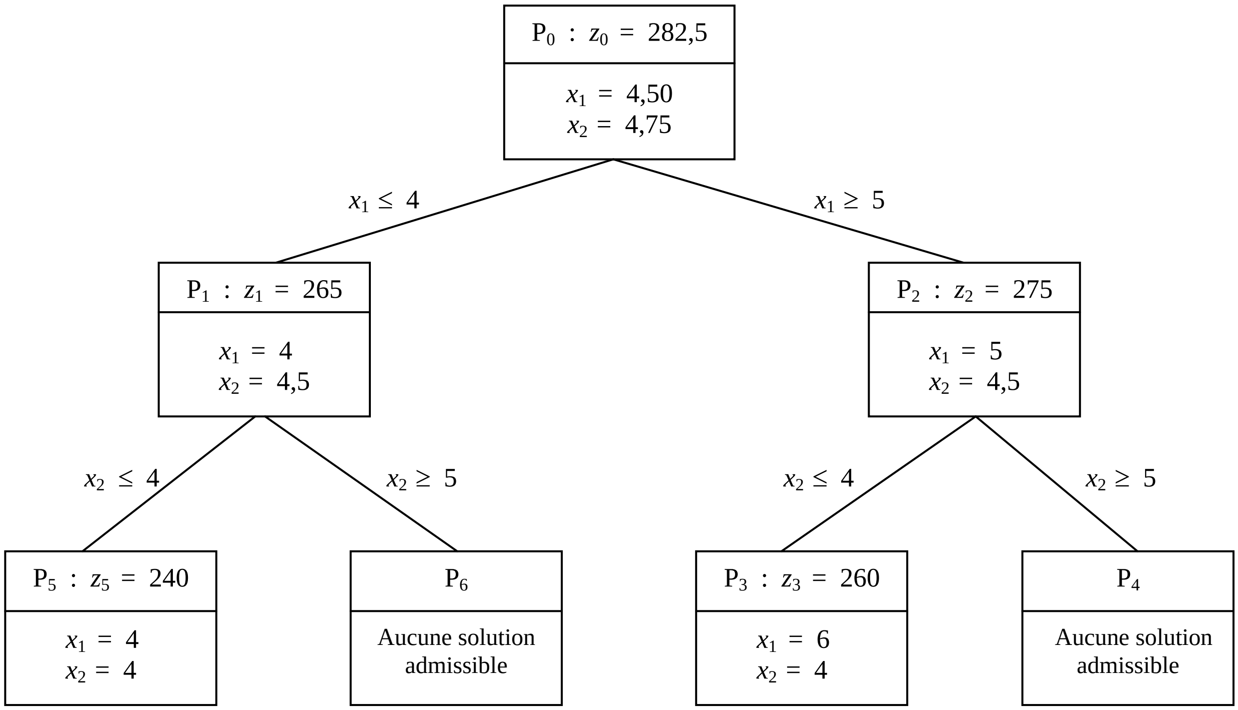


Figure 2 La feuille P0 du fichier SÉP-Exm1.xlsx

	A	B	C	D	E	F
1	**4.3.2 et 4.3.3 La méthode SÉP: exemple 1**					
2						
3	**Problème de maximisation**					
4						
5	**Dimensions *m* et *n***	3	2			
6						
7						
8	**Noms des variables**	x_1	x_2	M.G.	Signe	Const.
9						
10	**Coefficients c_j et valeur de z**	10	50	282,5		
11						
12	**Contraintes technologiques**					
13		-1	2	5	<=	5
14		1	2	14	<=	14
15		1	0	4,5	<=	8
16						
17	**Bornes inférieures**	0	0			
18	**Bornes supérieures**	8	7			
19						
20	**Contraintes d'intégrité utilisées**	Ent	Ent			
21						
22	**Valeurs des variables x_j**	4,5	4,75			

Lors de la résolution des différents modèles (P_h) de l'arbre d'énumération, on exigera non seulement que les contraintes technologiques (6) à (8) soient satisfaites, mais également que les coordonnées x_j respectent les bornes reportées dans les lignes 17 et 18. La figure 3 ci-dessous reproduit la boîte « ***Paramètres du solveur*** » de la feuille P0 du fichier SÉP-Exm1.xlsx. Les plages auxquelles réfèrent les noms z, xj, B.inf et B.sup sont énumérées dans le tableau 1.

Figure 3 La boîte « *Paramètres du solveur* » de la feuille P0

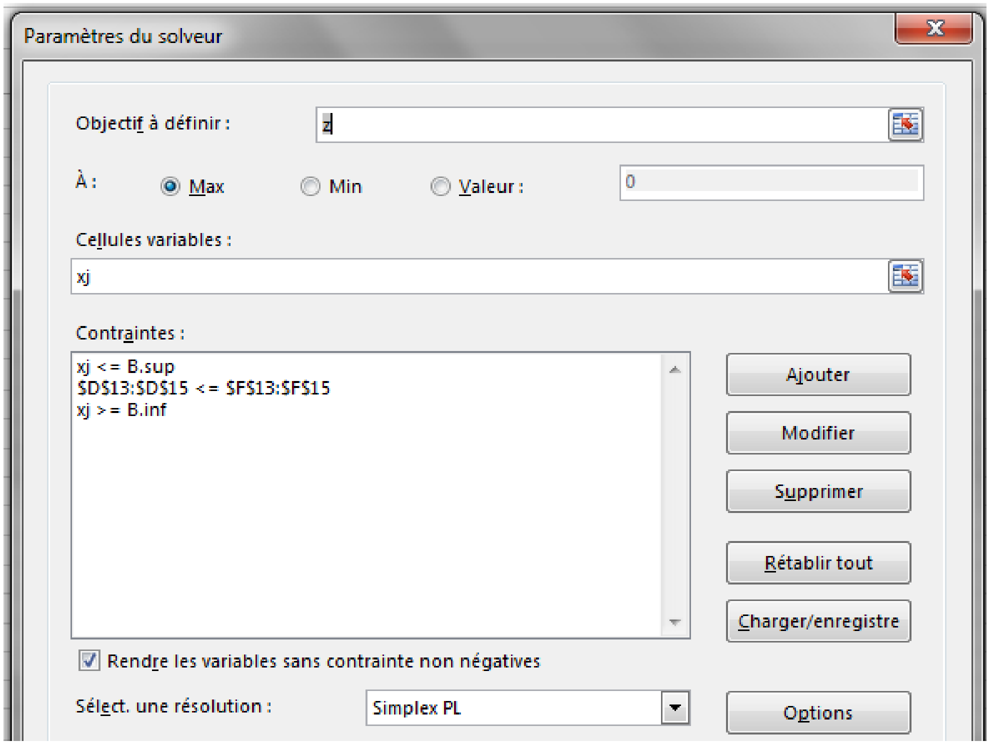


Tableau 1 Les noms de la feuille P0

Nom	Plage	Interprétation
B.inf	B17:C17	Bornes inférieures des variables
B.sup	B18:C18	Bornes supérieures des variables
cj	B10:C10	Coefficients dans la fonction-objectif *z*
xj	B22:C22	Valeurs des variables
z	D10	Valeur de la fonction-objectif *z*

Initialement – lors de la résolution (P_0) –, les bornes sont telles que décrites dans la figure 2. Après la première séparation, il faudra résoudre (P_1) et (P_2). Pour le modèle (P_1), qui est obtenu de (P_0) en lui adjoignant l'inéquation « $x_1 \leq 4$ », la borne supérieure de x_1 sera fixée à 4 et les trois autres cellules de la plage B17:C18 resteront inchangées; la figure 4 (voir page suivante) indique les valeurs qui apparaîtront dans cette plage. Le modèle est résolu à l'aide du solveur et la solution optimale obtenue ($z = 265$ et $x_1 = 4$ et $x_2 = 4{,}5$) est reportée dans la boîte P_1 de la figure 1.

Figure 4 Les bornes des variables de décision dans le modèle (P_1)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	0	0
18	**Bornes supérieures**	4	7

Le modèle (P_2) est obtenu de (P_0) en lui ajoutant la contrainte « $x_1 \geq 5$ » : pour le résoudre, on remet la cellule B17 à sa valeur par défaut 8 et on reporte en B18 la borne inférieure 5 associée au modèle (P_2). La figure 5 ci-dessous reproduit les lignes 17 et 18 de la feuille P0 dans ce cas. La solution optimale obtenue (z = 275 et x_1 = 5 et x_2 = 4,5) est reportée dans la boîte P_2 de la figure 1.

Figure 5 Les bornes associées au modèle (P_2)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	5	0
18	**Bornes supérieures**	8	7

La seconde séparation se fait à partir du nœud (P_2), en arrondissant la valeur de la variable x_2 vers le bas, puis vers le haut. Lors de la résolution des modèles (P_3) et (P_4) issus de cette séparation, les bornes associées à x_1 seront celles de la figure 5. Dans le cas de (P_3), qui est obtenu de (P_2) en lui adjoignant la contrainte « $x_2 \leq 4$ », on fixera à 4 la borne supérieure de x_2 et on laissera inchangée la borne inférieure. La plage B17:C18 sera donc complétée de la façon décrite à la figure 6 ci-dessous. La solution optimale obtenue (z = 260 et x_1 = 6 et x_2 = 4) est reportée dans la boîte P_3 de la figure 1.

Figure 6 Les bornes associées au modèle (P_3)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	5	0
18	**Bornes supérieures**	8	4

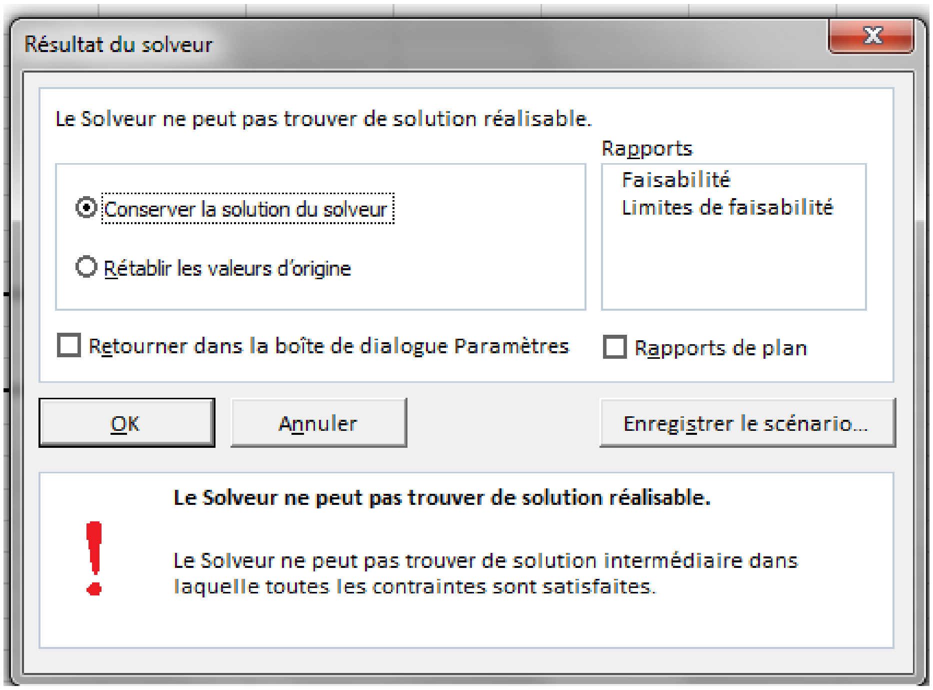
Le modèle (P_4) est obtenu de (P_2) en lui ajoutant la contrainte « $x_2 \geq 5$ » : pour le résoudre, on remet la cellule C17 à sa valeur par défaut 7 et on reporte en C18 la borne inférieure 5 associée à (P_4). La figure 7 ci-dessous reproduit les lignes 17 et 18 de la feuille P0 dans ce cas.

Figure 7 Les bornes associées au modèle (P_4)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	5	5
18	**Bornes supérieures**	8	7

En réponse à la commande ***Résoudre*** du solveur, Excel retourne que «le solveur ne peut pas trouver de solution réalisable» (voir figure 8, page suivante). On reporte cette conclusion dans la boîte P_4 de la figure 1.

Figure 8 La boîte de dialogue « *Résultat du solveur* » pour le modèle (P_4)



La 3[e] séparation est similaire à la seconde, sauf que le point de départ est cette fois le nœud (P_1). Il faut remettre les bornes associées à x_1 aux valeurs 0 et 4 affichées dans la figure 4. Les figures 9 et 10 reproduisent la forme que prendra la plage B17:C18 de la feuille P0 lors de la résolution des modèles (P_5) et (P_6). Les conclusions obtenues du solveur sont semblables à celles obtenues lors de la séparation précédente et ont été reportées dans les boîtes appropriées de la figure 1.

Figure 9 Les bornes associées au modèle (P_5)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	0	0
18	**Bornes supérieures**	4	4

Figure 10 Les bornes associées au modèle (P_6)

	A	B	C
17	**Bornes inférieures**	0	5
18	**Bornes supérieures**	4	7