Annexe 5A L'algorithme du transport

5A.1 Le problème de transport classique

Tel qu'indiqué à la section 5.3.1, le modèle de transport classique est un cas particulier de réseau. Il peut donc s'exprimer comme un modèle linéaire et être traité par l'algorithme du simplexe. Cependant, la structure particulière de ce modèle permet de simplifier considérablement l'algorithme. Nous illustrons ici ce que devient l'algorithme lorsqu'il est appliqué à un modèle linéaire provenant d'un problème de transport.

Nous illustrerons l'algorithme du transport par l'exemple de Sporcau considéré à la section 5.3.1. Rappelons le contexte. L'entreprise recherche un plan d'acheminement à coût minimal des laboratoires aux centres de distribution. Les tableaux ci-dessous donnent, le premier les coûts unitaires de transport entre laboratoires et centres de distribution, le second le nombre d'unités disponibles en chaque laboratoire, de même que la demande en chaque centre.

TABLEAU 1 Tableau des coûts unitaires (en 00$)

Laboratoire	Centre de distribution				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	1	8	1	5	4
L_2	5	5	3	6	7
L_3	2	9	5	9	8

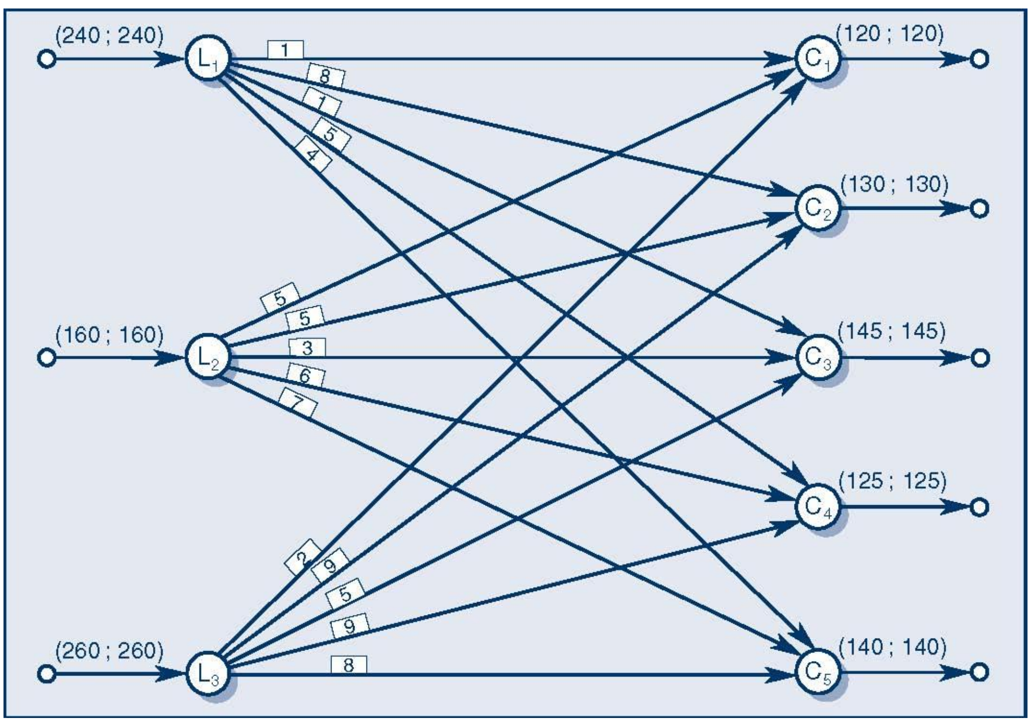
TABLEAU 2 Quantités disponibles et requises (en tonnes)

Laboratoire	L_1		L_2		L_3	Total
Disponibilité S_i	240		160		260	660
Centre	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Total
Demande D_j	120	130	145	125	140	660

Dans le problème de transport classique, on cherche à expédier un produit directement de *m* **origines** à *n* **destinations**, sans que soient imposées, sur les routes empruntées, des conditions quant au poids maximal ou minimal permis. Dans le cas de Sporcau, les origines sont les laboratoires, et les destinations, les centres de distribution ; de plus, $m = 3$ et $n = 5$.

La figure 1 ci-dessous, qui est identique à la figure 5.36 du manuel, reproduit le réseau de transport de Sporcau. Tel qu'indiqué à la section 5.3.1, la quantité totale disponible dans les laboratoires coïncide avec la demande totale dans les différents centres de distribution, soit 660 tonnes dans chaque cas. Un tel **problème de transport** où l'offre totale est égale à la demande totale est dit **équilibré**. Ainsi, de façon à satisfaire la demande des centres, chaque laboratoire devra expédier toutes les saucisses dont il dispose et chaque centre recevra exactement la quantité de saucisses requise pour satisfaire la totalité de la demande, ce qui dans le réseau se traduit par une égalité entre la borne inférieure et la borne supérieure de chacun des arcs virtuels associés aux origines et aux destinations. Cette propriété est essentielle à la validité de l'algorithme du transport. Dans les contextes où l'équilibre entre offre et demande n'est pas respecté, il faudra modifier le problème par une astuce pour le rendre artificiellement équilibré (voir section 5A.6).

FIGURE 1 Le réseau



Comme les bornes inférieures et supérieures sont égales sur tous les arcs virtuels, le flot sur ces arcs est fixé a priori et il est inutile d'associer des variables de décision à ces arcs. Le modèle linéaire (T) représentant ce problème de transport sera donc calqué sur celui décrit aux pages 223 et 224 et comprendra seulement les 15 variables suivantes :

$$x_{ij} = \text{quantité (en t) à transporter de } L_i \text{ à } C_j$$

où i = 1, 2, 3 et j = 1, 2, 3, 4, 5. L'objectif consiste à minimiser le coût total de transport z, où

$$z = 1\,x_{11} + 8\,x_{12} + 1\,x_{13} + 5\,x_{14} + 4\,x_{15} + 5\,x_{21} + \ldots + 8\,x_{35}\,.$$

Les contraintes technologiques exigent que chaque laboratoire expédie tout ce qui est disponible et que chaque centre de distribution reçoive exactement la quantité demandée :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 240$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 160$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 145$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 125$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 140.$$

L'intégrité des variables de décision n'est pas requise dans le contexte de Sporcau, car le transport d'un nombre non entier de tonnes de saucisses serait tout à fait acceptable pour n'importe lequel des couples (L_i ; C_j). Toutefois, on démontre qu'en présence de quantités S_i et D_j qui sont toutes entières, il existe toujours une solution optimale de (T) où chaque variable x_{ij} prend une valeur entière.

Le modèle (T) constitue un modèle linéaire comportant ($m \times n$) variables et ($m + n$) contraintes technologiques écrites sous forme d'équations. Selon les résultats exposés au chapitre 3, toute solution de base admissible de (T) comportera ($m + n$) variables de base. Dans le modèle (T), toutefois, chacune des contraintes technologiques est redondante en présence du groupe que forment les autres. Pour fixer les idées, prenons le cas de la dernière contrainte où il est imposé que le centre C_5 reçoive D_5 = 140 tonnes de saucisses. Toute solution qui satisfait aux autres contraintes prescrit aux trois laboratoires d'expédier au total 660 tonnes de saucisses et garantit la réception par C_1, C_2, C_3 et C_4 de 120 + 130 + 145 + 125 = 520 tonnes de saucisses. Il s'ensuit que le dernier centre recevra le solde, soit 660 – 520 = 140 tonnes, sans qu'une contrainte ait à l'exiger expressément.

De cette façon, on se convainc rapidement que le retrait de l'une ou l'autre des contraintes technologiques donne un modèle équivalent à (T). Pour fixer les idées, retirons de (T) la dernière contrainte : le modèle linéaire résultant comporte ($m + n - 1$) contraintes et une solution de base de ce problème comporte ($m + n - 1$) variables de base. Pour Sporcau, une solution de base comptera 3 + 5 – 1 = 7 variables de base (dont certaines pourraient être égales à 0) ; autrement dit, dans une solution de base, le transport des saucisses utilisera au plus 7 des 15 arcs laboratoires-centres possibles.

5A.2 Le tableau de transport

Les données pertinentes au cas de Sporcau sont présentées sous forme d'un tableau *ad hoc*, appelé **tableau de transport** (voir le tableau 3 ci-dessous). Les laboratoires-origines L_1, L_2 et L_3 correspondent aux lignes et les centres-destinations, aux colonnes. À droite du tableau apparaît, à la ligne i, la disponibilité S_i du laboratoire L_i; sous le tableau, à la colonne j, on trouve la demande D_j à satisfaire par le centre C_j.

Pour chaque couple origine-destination, le coût unitaire de transport (exprimé en centaines de dollars pour alléger l'écriture) occupe le coin supérieur droit de la case appropriée. Chacun de ces coûts unitaires se dénote c_{ij}, où i désigne l'indice de l'origine, et j, celui de la destination. Par exemple $c_{23} = 3$ indique qu'il en coûte 300 $ pour transporter une tonne de saucisses de L_2 à C_3.

TABLEAU 3 Le tableau de transport de Sporcau

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1	8	1	5	4	240
L_2	5	5	3	6	7	160
L_3	2	9	5	9	8	260
D_j	120	130	145	125	140	660

Le tableau 4 (voir page suivante) donne une solution de base admissible initiale du problème de Sporcau[1]. La valeur prise par une variable de base x_{ij} est indiquée par le nombre reporté en gras dans la case (i ; j) : par exemple, $x_{11} = 120$, puisque le nombre 120 apparaît dans la case (1 ; 1) située à l'intersection de la ligne L_1 et de la colonne C_1. L'absence de valeur dans une case (i ; j) signifie que la variable correspondante x_{ij} est hors base et, par conséquent, nulle. Il est facile de vérifier que la solution décrite au tableau 5.27 est bien une solution de base admissible: on compte 7 cases, dites **cases de base**, où sont reportées les valeurs des 7 variables présentes dans la base de la solution proposée ; la somme des nombres de chaque ligne i donne S_i et la somme des nombres de chaque colonne j donne D_j. Le total des coûts de transport correspondant à cette solution est 3 795 centaines de dollars, soit 379 500 dollars.

[1] Cette solution a été obtenue grâce à une méthode heuristique dite **méthode du coin nord-ouest**, qui attribue, à autant de reprises qu'il le faut, le plus grand nombre possible à la case encore disponible située le plus à l'ouest et le plus au nord pour un observateur qui verrait le tableau comme une carte géographique. Cette méthode sera décrite plus en détail dans la section 5A.4.

TABLEAU 4 Sporcau : une solution de base admissible initiale

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	(1) **120**	(8) **120**	(1)	(5)	(4)	240
L_2	(5)	(5) **10**	(3) **145**	(6) **5**	(7)	160
L_3	(2)	(9)	(5)	(9) **120**	(8) **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

5A.3 L'algorithme du transport

L'algorithme du transport, une fois amorcé à l'aide d'une solution de base admissible initiale obtenue selon l'une des méthodes heuristiques courantes (trois d'entre elles sont décrites à la section 5A.4), ou bien établit l'optimalité de cette première solution ou bien donne, à chaque itération, une solution de base admissible dont le coût est inférieur ou égal à celui de la solution précédente. Une fois lancé, l'algorithme poursuit ses itérations jusqu'à l'obtention d'une solution de base optimale.

L'algorithme du transport est une **version spécialisée de l'algorithme du simplexe** : lors d'une itération, l'ensemble des variables de base est modifié, une variable entrant dans la base et une autre en sortant.

Amorçons donc l'algorithme du transport par la solution de base décrite au tableau 4. Pour tester l'optimalité de cette solution initiale, il faut d'abord déterminer, pour toute variable hors base x_{ij}, son coût marginal $\bar{c}_{ij}$. Une méthode de calcul, dite méthode des potentiels, est donnée à la section 5A.5. Pour l'instant, concentrons-nous sur l'utilisation de ces coûts marginaux et considérons le tableau 5, qui reproduit le tableau 4, mais en y ajoutant les coûts marginaux des variables hors base.

TABLEAU 5 Coûts marginaux de la solution de base initiale

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1 **120**	8 **120**	–5 1	–4 5	–4 4	240
L_2	7 5	5 **10**	3 **145**	6 **5**	2 7	160
L_3	1 2	1 9	–1 5	9 **120**	8 **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La solution du tableau 5 n'est pas optimale, car les variables hors base x_{13}, x_{14}, x_{15} et x_{33} admettent des coûts marginaux négatifs. On pourra donc diminuer les coûts de transport en assignant à l'une ou l'autre de ces variables hors base une valeur positive.

Comme dans l'algorithme du simplexe, on applique la méthode MAM et on choisit pour entrer dans la base l'une des variables hors base dont le coût marginal négatif est le plus élevé en valeur absolue. Dans le cas présent, le coût marginal extrême –5 est atteint dans la seule case (1; 3) et x_{13} sera la variable entrante. Si la valeur de x_{13} était portée de 0 à +1 et qu'aucune autre modification n'était apportée dans les autres cases, 241 tonnes de saucisses partiraient du laboratoire L_1, et le centre C_3 en recevrait 146 tonnes, ce qui n'est pas admissible. Augmenter la variable hors base x_{13} exige donc de rééquilibrer les propositions de transport, de façon à respecter à nouveau les disponibilités et les demandes. Ces ajustements devront **n'affecter que des variables de base**, car comme nous l'avons dit précédemment, l'algorithme du transport est une version spécialisée de l'algorithme du simplexe.

Le tableau 6 (voir page suivante) donne le **cycle de changement**, ou ***stepping-stone***, associé à la variable hors base x_{13}: quand x_{13} passe de 0 à une valeur positive Δ, trois variables de base sont affectées, soit x_{12}, x_{22} et x_{23}; l'effet unitaire net sur z est égal à –5 :

$$+1-8+5-3 \;=\; -5 \;=\; \bar{c}_{23}.$$

Ainsi, le cycle de changement, qui explicite les modifications des variables de base induites par le fait de donner une valeur positive à la variable entrante x_{13}, permet de retrouver la valeur de $\bar{c}_{23}$. Cependant, il serait fastidieux de calculer de cette façon les coûts marginaux des huit variables hors base de ce tableau ; la méthode des potentiels décrite à la section 5A.5 est plus rapide.

TABLEAU 6 Solution de base initiale et cycle de changement de x_{13}

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	$\boxed{1}$ **120**	$\boxed{8}$ **120 – Δ**	–5 $\boxed{1}$ **+ Δ**	–4 $\boxed{5}$	–4 $\boxed{4}$	240
L_2	7 $\boxed{5}$	$\boxed{5}$ **10 + Δ**	$\boxed{3}$ **145 – Δ**	$\boxed{6}$ **5**	2 $\boxed{7}$	160
L_3	1 $\boxed{2}$	1 $\boxed{9}$	–1 $\boxed{5}$	$\boxed{9}$ **120**	$\boxed{8}$ **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La non-négativité des variables de base x_{12} et x_{23} implique que Δ ne peut dépasser les valeurs de ces variables dans le tableau :

$$\Delta \leq \min\{120 ; 145\} = 120.$$

On pose donc : Δ = 120. Par conséquent, x_{12} sera la variable sortante ; et les coûts de transport de la prochaine solution de base s'établiront à 3 195 centaines de dollars :

$$3\,795 - (5 \times 120) = 3\,195.$$

Le tableau 7 ci-dessous donne la solution de base numéro 1 résultant de la première itération. (Les coûts marginaux des variables hors base, qui seront nécessaires à la prochaine itération, y sont reportés; à nouveau, on se reportera à la section 5A.5 pour le calcul de ces coûts marginaux.)

TABLEAU 7 Solution n^{o} 1 résultant de la première itération

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	$\boxed{1}$ **120**	5 $\boxed{8}$	$\boxed{1}$ **120**	1 $\boxed{5}$	1 $\boxed{4}$	240
L_2	2 $\boxed{5}$	$\boxed{5}$ **130**	$\boxed{3}$ **25**	$\boxed{6}$ **5**	2 $\boxed{7}$	160
L_3	–4 $\boxed{2}$	1 $\boxed{9}$	–1 $\boxed{5}$	$\boxed{9}$ **120**	$\boxed{8}$ **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

Dans le tableau 7, les coûts marginaux de certaines variables hors base sont négatifs. Il semble donc que la solution de base associée ne soit pas optimale. Une autre itération sera nécessaire.

On choisit la variable entrante selon le critère MAM, qui, rappelons-le, recommande de sélectionner l'une des variables hors base dont le coût marginal négatif est le plus élevé en valeur absolue. Ici, il s'agit de x_{31}, dont le cycle de changement est reproduit au tableau 8.

TABLEAU 8 Solution n° 1 et cycle de changement de x_{31}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	**120 – Δ**		**120 + Δ**			240
L_2		**130**	**25 – Δ**	**5 + Δ**		160
L_3	**+ Δ**			**120 – Δ**	**140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

À cause de la non-négativité des variables de base, la valeur maximale que l'on peut attribuer à Δ est 25:

$$\Delta \leq \min \{120 ; 25; 120\} = 25.$$

On pose donc : Δ = 25. La variable sortante est x_{23} cette fois. La solution de base résultant de l'itération est donnée au tableau 9 ; les coûts de transport associés s'élèvent à 3 095 centaines de dollars :

$$3\,195 - (4 \times 25) = 3\,095.$$

TABLEAU 9 Solution n° 2 résultant de la deuxième itération

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	$\boxed{1}$ **95**	1 $\boxed{8}$	$\boxed{1}$ **145**	–3 $\boxed{5}$	–3 $\boxed{4}$	240
L_2	6 $\boxed{5}$	$\boxed{5}$ **130**	4 $\boxed{3}$	$\boxed{6}$ **30**	2 $\boxed{7}$	160
L_3	$\boxed{2}$ **25**	1 $\boxed{9}$	3 $\boxed{5}$	$\boxed{9}$ **95**	$\boxed{8}$ **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La solution n° 2 décrite au tableau 9 n'est pas optimale, car les coûts marginaux de certaines variables hors base sont négatifs. Il serait donc possible de diminuer davantage la valeur de z en entrant dans la base soit x_{14}, soit x_{15}. Laquelle choisir ? Comme $\bar{c}_{14} = \bar{c}_{15} = -3$, le critère usuel

MAM laisse plusieurs candidates en lice. Il s'avère donc nécessaire de recourir à un 2^e critère[2] : **en cas d'égalité, on retient une variable dont le coefficient c_{ij} est minimal**. Ici, la variable entrante sera x_{15} ; et le cycle de changement sera composé des cases (1 ; 5), (1 ; 1), (3 ; 1) et (3 ; 5). Le tableau 10 donne la solution de base résultant de l'itération. Les coûts de transport associés sont de 3 095 – (3 × 95) = 2 810 centaines de dollars. Enfin, le tableau 10 ne montre aucun coût marginal négatif, ce qui permet de conclure à l'optimalité de la solution n° 3.

TABLEAU 10 Solution n° 3 résultant de la troisième itération

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	3 1	4 8	1 **145**	0 5	4 **95**	240
L_2	6 5	5 **130**	1 3	6 **30**	2 7	160
L_3	2 **120**	1 9	0 5	9 **95**	8 **45**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La solution du tableau 10 n'est pas l'unique solution optimale du problème de Sporcau. En effet, les variables hors base x_{14} et x_{33} admettent un coût marginal nul et peuvent, en entrant dans la base, prendre une valeur positive. Le tableau 11 donne une solution de base différente obtenue du tableau 10 en traitant x_{33} comme variable entrante ; évidemment, l'itération laisse inchangée la valeur de la fonction-objectif z, de sorte que le plan de transport représenté par la solution du tableau 11 entraîne des coûts totaux de 2 810 centaines de dollars, tout comme le plan décrit par le tableau 10.

TABLEAU 11 Autre solution de base optimale

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1			**100**		**140**	240
L_2		**130**		**30**		160
L_3	**120**		**45**	**95**		260
D_j	120	130	145	125	140	660

[2] Si plusieurs variables candidates étaient à égalité selon ce 2^e critère également, on les départagerait soit de façon aléatoire, soit en privilégiant la variable x_{ij} dont l'indice (i ; j) est le plus faible selon l'ordre lexicographique.

5A.4 Les méthodes heuristiques de calcul d'une solution de base admissible initiale

La méthode du coin nord-ouest

Il s'agit de la méthode heuristique la plus facile à appliquer, mais elle donne souvent des solutions éloignées de l'optimum. C'est celle qui a été utilisée pour obtenir la solution de base du tableau 4. Nous référons à cet exemple pour illustrer la méthode décrite ci-après.

1. Amorcer la méthode avec la case située dans le coin supérieur gauche du tableau de transport.
2. Attribuer le plus d'unités possible à la case courante.
3. Aller à une case **adjacente** à la case courante, en se déplaçant soit vers la droite, soit vers le bas. Revenir à l'étape 2.

La méthode s'arrête après l'attribution à la case située dans le coin inférieur droit.

Dans la plupart des cas, la direction à choisir lors de l'étape 3 s'impose. Considérons, à titre d'exemple, le tableau 4 : on amorce la méthode en posant $x_{11} = 120$, puis on doit aller vers la droite, car la demande du centre C_1 est déjà complètement satisfaite par la quantité que l'on planifie d'expédier de L_1 ; de même, l'attribution de la valeur 120 à la case (1 ; 2) est nécessairement suivie d'un déplacement vers le bas, puisque le plan de transport esquissé épuise déjà les 240 unités disponibles en L_1. Dans certains cas, cependant, les deux directions de déplacement sont logiquement possibles. Nous indiquerons à la section 5A.7 comment traiter ces cas particuliers, qui mènent toujours à une solution de base dégénérée.

* La méthode des coûts minimaux (CM)[3]

Cette méthode tire son nom de la priorité qu'elle accorde à l'acheminement de quantités les plus grandes possible par des routes origine-destination dont les coûts unitaires de transport sont les plus faibles. Acheminer une quantité maximale de biens sur une telle route *i*-*j* correspond à attribuer la plus grande valeur possible à une case (*i*; *j*) choisie parmi celles des cases disponibles dont le coût unitaire de transport est minimal. Une **case** est dite **disponible** tant qu'elle n'a pas fait l'objet d'un choix ou n'a pas été «éliminée» à la suite d'un choix.

Appliquons cette méthode au problème de transport de Sporcau. Initialement, toutes les cases sont disponibles. Les deux cases de coût unitaire minimal sont (1; 1) et (1; 3). Cherchons donc à leur attribuer tour à tour le nombre le plus grand possible. Prenons d'abord la case (1 ; 1) : comme illustré ci-dessous à gauche, on ne peut faire transiter plus de 120 unités sur la route L_1-C_1.

[3] Les parties du texte marquées d'un astérisque peuvent être omises, sans nuire à la continuité.

$$\begin{array}{ccc} & C_1 & \\ L_1 & \boxed{} & 240 \\ & 120 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & C_3 & \\ L_1 & \boxed{} & 240 \\ & 145 & \end{array}$$

À la case (1; 3), il est possible d'attribuer un maximum de 145 unités. C'est donc cette dernière qui sera préférée, puisqu'on peut lui attribuer 25 unités de plus. On pose: $x_{13} = 145$.

On obtient le tableau de transport 12 ci-dessous. Puisque 145 tonnes vont être expédiées de L_1 vers C_3, le laboratoire L_1 dispose encore de 240 – 145 = 95 unités qui seront destinées à d'autres centres. La demande en C_3 est comblée : la **colonne** C_3 sera dite **saturée**. On indique l'attribution forcée de la valeur 0 aux cases (2 ; 3) et (3 ; 3) par des tirets, dont la présence indique la saturation de la colonne C_3. C'est une raison technique liée à la dégénérescence, et dont nous parlerons à la section 5A.7, qui nous fait placer dans chacune de ces cases un tiret plutôt qu'un 0.

TABLEAU 12 Méthode CM : tableau de transport après 1 attribution

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	(1)	(8)	(1) **145**	(5)	(4)	95 ~~240~~
L_2	(5)	(5)	(3) –	(6)	(7)	160
L_3	(2)	(9)	(5) –	(9)	(8)	260
D_j	120	130	~~145~~ 0	125	140	660

En résumé, une **attribution** selon la méthode des coûts minimaux comprend les étapes suivantes :

1. le choix d'une case disponible de coût unitaire minimal (s'il y a plusieurs candidates, on cherche à maximiser la valeur qui sera attribuée lors de l'étape 2 ; s'il en reste encore plus d'une, on choisit de façon aléatoire parmi les cases candidates restantes);
2. l'attribution à la case (i ; j) retenue du nombre le plus grand possible, compte tenu des disponibilités et des demandes résiduelles indiquées au tableau;
3. la mise à jour de la demande non comblée de C_j et de la disponibilité résiduelle de L_i ;

4. la saturation d'**une** rangée (à choisir[4] entre la ligne L_i et la colonne C_j) dont la marge contient maintenant le nombre 0 ; l'inscription de tirets dans les cases de la rangée déclarée saturée qui étaient encore disponibles.

La première attribution du problème de Sporcau se termine par un tableau de transport (*voir le tableau 12*) comportant une colonne saturée. La case (1 ; 1) est maintenant l'unique case disponible de coût minimal. La disponibilité du laboratoire L_1 a été révisée à la baisse lors de la 1^{re} attribution, de sorte que la quantité maximale que l'on peut expédier maintenant sur la route L_1-C_1 est de 95 tonnes.

	C_1	
L_1		95
	120	

On pose donc : $x_{11} = 95$. On a maintenant disposé des 240 tonnes de saucisses disponibles en L_1 et S_1 devient 0. Il faut également réviser à la baisse la demande du centre C_1, demande qui ne sera plus que de 25 tonnes. Enfin, comme on a épuisé les unités disponibles en L_1, les cases de la première ligne ne sont plus disponibles et l'on inscrit un tiret dans les cases (1 ; 2), (1 ; 4) et (1 ; 5). Le tableau 13 décrit la situation résultant de la 2^{e} attribution. On poursuit cette démarche jusqu'à ce que toutes les tonnes de saucisses disponibles dans les laboratoires aient été expédiées. Le tableau 14 résume les 7 attributions du problème de Sporcau. Une fois la méthode CM complétée, on obtient une solution de base admissible. Dans le cas de Sporcau, cette solution de base admissible initiale est le tableau de transport n^{o} 2 considéré à la section 5A.3 (*voir le tableau 9*).

TABLEAU 13 Méthode CM : tableau de transport après 2 attributions

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1 **95**	8 –	1 **145**	5 –	4 –	0 ~~240~~
L_2	5	5	3 –	6	7	160
L_3	2	9	5 –	9	8	260
D_j	~~120~~ 25	130	~~145~~ 0	125	140	660

[4] Si, lors d'une attribution à la case (i ; j), les valeurs dans les marges des rangées L_i et C_j deviennent nulles en même temps, on déclare saturée une seule de ces deux rangées. La solution de base résultant de la méthode CM sera dégénérée. Nous indiquons à la section 5A.7 comment traiter cette situation.

TABLEAU 14 Méthode CM : résumé des attributions									
N°	S_1	S_2	S_3	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Attribution
1	240	160	260	120	130	145	125	140	$x_{13} = 145$
2	95	160	260	120	130	–	125	140	$x_{11} = 95$
3	–	160	260	25	130	–	125	140	$x_{31} = 25$
4	–	160	235	–	130	–	125	140	$x_{22} = 130$
5	–	30	235	–	–	–	125	140	$x_{24} = 30$
6	–	–	235	–	–	–	95	140	$x_{35} = 140$
7	–	–	95	–	–	–	95	–	$x_{34} = 95$

La méthode CM est généralement supérieure à celle du coin nord-ouest. Cependant, elle résulte parfois en une solution initiale qui s'avère contre-intuitive et de coût fort éloigné de celui d'une solution optimale. Pour le constater, remplaçons par 1 000 le coût unitaire associé à la case (3 ; 4) faisant l'objet de la dernière attribution. La méthode CM redonnerait pour ce nouveau problème la même solution initiale. Mais le transport de 95 tonnes de L_3 vers C_4 coûterait 95 000 centaines de dollars. Assurément, la route L_3-C_4 ne serait pas retenue dans une solution optimale. La méthode CM, ne permettant pas de retour en arrière, force souvent, vers la fin, des attributions à des cases de coût unitaire élevé, alors qu'il est trop tard pour faire intervenir le bon sens.

***La méthode des pénalités (PEN)**

Cette méthode heuristique, que l'on doit à Reinfeld et Vogel[5], donne habituellement une solution admissible de coût inférieur à celui de la solution obtenue par la méthode CM. Cette dernière propose de traiter d'abord la case de coût unitaire minimal, sans tenir compte de l'impact de cette première attribution sur les décisions futures. Le bon sens dicterait plutôt de tenir compte au moins des conséquences prochaines. À cette fin, on calcule, pour chaque rangée où il y a au moins deux cases disponibles, une pénalité définie comme suit :

> *La **pénalité** associée à une rangée est la valeur absolue de la différence entre les deux coûts unitaires minimaux des cases disponibles apparaissant dans cette rangée. Elle mesure l'augmentation minimale du coût de transport d'une unité si celle-ci n'empruntait pas la route de coût minimal de la rangée.*

Les pénalités-lignes et les pénalités-colonnes associées au problème de transport de Sporcau sont données au tableau 15.

[5] N. V. Reinfeld et W. R. Vogel, *Mathematical Programming*, PrenticeHall, Englewood Cliffs, 1958, p. 59-70.

TABLEAU 15 Méthode PEN: pénalités avant la 1re attribution

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	
L_1	1	8	1	5	4	240	0
L_2	5	5	3	6	7	160	2
L_3	2	9	5	9	8	260	3
D_j	120	130	145	125	140	660	
	1	3	2	1	3		

La pénalité maximale 3 est associée à trois rangées : la ligne L_3, les colonnes C_2 et C_5. La première attribution se fera dans l'une d'entre elles : on choisira la case de coût minimal dans L_3, C_2 et C_5. Il s'agit de la case (3 ; 1), dans laquelle on reporte la valeur 120. La demande du centre C_1 est entièrement comblée par cette première attribution : par conséquent, les cases (1 ; 1) et (2 ; 1) ne seront désormais plus disponibles. De plus, des 260 tonnes de saucisses produites par le laboratoire L_3, 120 sont destinées à C_1, de sorte que la disponibilité de L_3 s'établit maintenant à 140 unités seulement. Enfin, il faut réviser les pénalités pour tenir compte de la non-disponibilité des cases de la colonne C_1. Le tableau 16 décrit la situation après cette première attribution.

TABLEAU 16 Méthode PEN: pénalités après 1 attribution

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	
L_1	1 –	8	1	5	4	240	3
L_2	5 –	5	3	6	7	160	2
L_3	2 **120**	9	5	9	8	140 ~~260~~	3
D_j	~~120~~ 0	130	145	125	140	660	
	*	3	2	1	3		

La plus grande pénalité apparaissant au tableau 16 est égale à 3, comme précédemment. Cette fois, elle est associée à quatre rangées : les lignes L_1 et L_3, les colonnes C_2 et C_5. Le choix de la case où s'effectuera l'attribution se fait selon la règle hiérarchique suivante : on retient parmi les cases disponibles

1. celles dont la rangée est associée à la pénalité la plus élevée;
2. celles de coût minimal;
3. celles auxquelles on peut attribuer le nombre maximal.

S'il reste encore plus d'une case candidate, le choix se fait alors de façon aléatoire parmi les candidates encore en lice.

Dans le cas du tableau 16, on retient la case (1 ; 3), à laquelle on attribue la valeur 145. On poursuit cette démarche jusqu'à ce que toutes les tonnes de saucisses disponibles dans les laboratoires aient été expédiées. Le tableau 17 résume les 7 attributions du problème de Sporcau. (Un trait indique que la rangée est saturée ; un astérisque, qu'elle contient une seule case disponible.) Noter que la dernière attribution (x_{34} = 95) se fait dans la case située à l'intersection de la seule ligne (L_3) et de la seule colonne (C_4) encore disponibles et qu'elle sature ces deux rangées simultanément. C'est pourquoi la solution initiale résultante comporte seulement 7 variables de base, soit une de moins que le nombre total de rangées.

TABLEAU 17 Méthode CM : résumé des attributions

N°	L_1	L_2	L_3	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Attribution
1	0	2	3	1	3	2	1	3	$x_{31} = 120$
2	3	2	3	–	3	2	1	3	$x_{13} = 145$
3	1	1	1	–	3	–	1	3	$x_{15} = 95$
4	–	1	1	–	4	–	3	1	$x_{22} = 130$
5	–	1	1	–	–	–	3	1	$x_{24} = 30$
6	–	–	1	–	–	–	*	*	$x_{35} = 45$
7	–	–	*	–	–	–	*	–	$x_{34} = 95$

Une fois la méthode PEN complétée, on obtient une solution de base admissible. Dans le cas de Sporcau, cette solution initiale est en fait la solution optimale (*voir le tableau 10*).

La méthode PEN s'est révélée fort efficace dans le présent exemple, car elle mène immédiatement à une solution optimale. Il n'en est pas toujours ainsi. On peut cependant énoncer les deux principes généraux suivants.

1. La méthode PEN fournit habituellement une solution admissible de coût plus faible que celle donnée par la méthode CM.
2. La méthode PEN conduit souvent à une solution dont le coût est voisin de celui d'une solution optimale. On dit de la méthode PEN qu'elle est une méthode heuristique « quasi optimale ».

5A.5 Le calcul des coûts marginaux : la méthode des potentiels

À la section 5A.3, nous avons utilisé les coûts marginaux $\bar{c}_{ij}$ des variables hors base, référant à la présente section pour une méthode systématique de calcul de ces coûts. Nous avons également indiqué comment le cycle de changement d'une variable entrante x_{ij} permet de retrouver le coût marginal $\bar{c}_{ij}$ associé. On pourrait déterminer de même les coûts marginaux de chaque variable hors base, en établissant son cycle de changement. Cependant, cette approche est fastidieuse. Montrons comment on peut s'y prendre plus rapidement.

Partons de la solution de base admissible trouvée par la méthode du coin nord-ouest (*voir le tableau 4*). Et construisons le tableau 18, appelé **tableau de calcul**. La lettre B y désigne les variables de base. Les u_i et les v_j sont des variables auxiliaires, dites **variables duales**, qui permettent d'obtenir rapidement le coût marginal associé à chacune des variables hors base. Mais indiquons d'abord comment déterminer les valeurs des variables duales. On peut montrer[6] que les coûts marginaux $\bar{c}_{ij}$ des différentes cases s'écrivent sous la forme :

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \tag{1}$$

Comme le coût marginal de toute variable de base est nul, il résulte de (1) que :

$$\text{si } x_{ij} \text{ est variable de base, } u_i + v_j = c_{ij}. \tag{2}$$

TABLEAU 18 Tableau de calcul pour la solution initiale n° 0

	$v_1 = 1$	$v_2 = 8$	$v_3 = 6$	$v_4 = 9$	$v_5 = 8$	S_i
$u_1 = 0$	1 **B**	8 **B**	1	5	4	240
$u_2 = -3$	5	5 **B**	3 **B**	6 **B**	7	160
$u_3 = 0$	2	9	5	9 **B**	8 **B**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

Pour la solution de base donnée au tableau 18, on obtient successivement :

Case de base	Équation
(1; 1)	$u_1 + v_1 = 1$
(1; 2)	$u_1 + v_2 = 8$

[6] Par la théorie de la dualité.

(2; 2)	$u_2 + v_2 = 5$	
(2 ; 3)	$u_2 + v_3 = 3$	(3)
(2 ; 4)	$u_2 + v_4 = 6$	
(3 ; 4)	$u_3 + v_4 = 9$	
(3 ; 5)	$u_3 + v_5 = 8.$	

L'ensemble (3) forme un système linéaire de 7 équations impliquant 8 variables duales. Comme le nombre de cases de base dans une solution de base est égal à $(m + n - 1)$, alors qu'un tableau de transport comporte $(m + n)$ rangées, les systèmes tels que (3) qui sont associés à un tableau de transport comportent toujours une variable de plus que d'équations et admettent un nombre infini de solutions. Pour en déterminer une, on convient de donner une valeur arbitraire à l'une des variables duales et de déduire les valeurs des autres variables à l'aide du système. L'usage[7] est de poser :

$$u_1 = 0. \tag{4}$$

Aussitôt posé $u_1 = 0$, les valeurs des autres variables du système (3) se déduisent rapidement.

Puisque	**et que**	**alors**
$u_1 = 0$	$u_1 + v_1 = 1$	$v_1 = 1$
$u_1 = 0$	$u_1 + v_2 = 8$	$v_2 = 8.$

La valeur prise par v_2 sert ensuite à trouver celle de u_2 :

$v_2 = 8$	$u_2 + v_2 = 5$	$u_2 = -3.$

Cette valeur de u_2 permet maintenant d'obtenir v_3 et v_4 :

$u_2 = -3$	$u_2 + v_3 = 3$	$v_3 = 6$
$u_2 = -3$	$u_2 + v_4 = 6$	$v_4 = 9.$

On obtient ensuite u_3, puis finalement v_5 :

$v_4 = 9$	$u_3 + v_4 = 9$	$u_3 = 0$
$u_3 = 0$	$u_3 + v_5 = 8$	$v_5 = 8.$

Une fois qu'on a obtenu les valeurs des variables duales, on utilise (1) pour le calcul des coûts marginaux associés aux variables hors base. À titre d'exemple, calculons les coûts marginaux $\bar{c}_{13}$ et $\bar{c}_{21}$ associés à la solution n° 0 (*voir le tableau 18*) :

$$\bar{c}_{13} = 1 - (0 + 6) = -5$$

$$\bar{c}_{21} = 5 - (-3 + 1) = 7.$$

[7] Les valeurs prises par les u_i et les v_j dépendent de (4), mais les coûts marginaux associés aux variables hors base restent les mêmes, quelle que soit la variable duale considérée dans (4) et quelle que soit la valeur qu'on lui assigne.

Le coût marginal –5 associé à la case (1; 3) coïncide évidemment avec celui déterminé à la section 5A.3 par le cycle de changement. Les coûts marginaux pour la solution de base considérée au tableau 18 sont donnés au tableau 4. Pour alléger les tableaux de transport, on convient généralement d'omettre les coûts marginaux des variables de base, qui sont nuls *a priori*.

Les valeurs des u_i et des v_j se trouvent directement à partir du tableau de calcul, sans écrire explicitement les équations du système (3). Cette approche est illustrée au tableau 19, qui reprend la solution optimale de Sporcau résultant de la 3^e itération (*voir le tableau 10*) et en calcule les valeurs des variables duales. L'ordre de calcul des variables u_i et v_j, qui est donné sous le tableau, est moins évident que dans l'exemple précédent. D'autres ordres de calcul seraient possibles.

TABLEAU 19 Tableau de calcul pour la solution n^o 3

	v_1 = -2	v_2 = 4	v_3 = 1	v_4 = 5	v_5 = 4	S$_i$
u_1 = 0	1	8	1 **B**	5	4 **B**	240
u_2 = 1	5	5 **B**	3	6 **B**	7	160
u_3 = 4	2 **B**	9	5	9 **B**	8 **B**	260
D$_j$	120	130	145	125	140	660

Ordre de calcul : u_1 , v_3 , v_5 , u_3 , v_1 , v_4 , u_2 , v_2.

5A.6 Les problèmes non équilibrés

Les problèmes de transport que l'on retrouve dans la pratique ne sont pas toujours équilibrés : souvent, la somme des disponibilités n'est pas égale à la somme des demandes. L'algorithme du transport, toutefois, a été conçu pour résoudre les problèmes équilibrés.

Un problème de transport non équilibré sera donc remplacé par un problème équilibré qui lui est équivalent dans un sens que nous allons préciser. À titre d'exemple, reprenons le problème de Sporcau, mais en modifiant la disponibilité du laboratoire L$_1$, que nous supposerons maintenant égale à 250 tonnes.

Dans cette nouvelle version du problème, la somme des S$_i$ dépasse de 10 unités la somme des D$_j$. Pour rétablir l'équilibre, on ajoute un centre fictif C$_6$, dont la demande coïncide avec l'écart entre disponibilité totale et demande totale, soit 10 tonnes. Attribuer une valeur positive Δ à l'une des variables x_{i6} associée à la colonne fictive C_6 signifie non pas que le laboratoire L_i expédie Δ tonnes on ne sait où, mais plutôt que la capacité de L_i est sous-utilisée de Δ tonnes. Il est donc raisonnable de fixer à 0 les coûts unitaires associés à ces expéditions virtuelles. Le tableau de transport du problème équilibré résultant est reproduit au tableau 20.

TABLEAU 20 Sporcau révisé: tableau de transport

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	S_i
L_1	1	8	1	5	4	0	250
L_2	5	5	3	6	7	0	160
L_3	2	9	5	9	8	0	260
D_j	120	130	145	125	140	10	670

5A.7 La dégénérescence

La dégénérescence et la méthode du coin nord-ouest

Appliquons la méthode du coin nord-ouest au problème révisé de Sporcau représenté au tableau 20. On pose d'abord x_{12} = 120, puis x_{13} = 130. Après ces deux attributions, la demande en C_1 et en C_2 est complètement satisfaite, et les 250 tonnes qui étaient disponibles en L_1 ont toutes été affectées. Le principe de la méthode incite à poursuivre avec une case le plus près possible de (1 ; 2). La plus rapprochée à laquelle on peut attribuer une valeur positive est (2 ; 3). Cependant, si l'on sautait ainsi de (1 ; 2) à (2 ; 3) et si l'on continuait en allant toujours vers la droite ou vers le bas, la méthode se terminerait avec 7 variables de base seulement, alors qu'une solution de base de ce problème doit comporter $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ variables de base. Afin de satisfaire à cette exigence, on attribuera une valeur 0 à l'une des cases adjacentes à (1 ; 2), qui sera considérée comme case de base. Il s'agit donc de choisir entre (1 ; 3) et (2 ; 2). Comme $c_{13} < c_{22}$, on retient[8] la case (1 ; 3) et l'on y reporte la valeur 0. La méthode se poursuit avec les cases (2 ; 3), (2 ; 4), (3 ; 4), (3 ; 5) et (3 ; 6). Le tableau 21 donne la solution de base résultante : elle comporte bien 8 variables de base, mais l'une d'entre elles, soit x_{13}, prend la valeur 0.

[8] S'il y avait égalité entre les deux coûts unitaires, on choisirait de façon aléatoire entre les cases candidates.

TABLEAU 21 Méthode du coin nord-ouest et solution de base dégénérée

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	S_i
L_1	1 **120**	8 **130**	1 **0**	5	4	0	250
L_2	5	5	3 **145**	6 **15**	7	0	160
L_3	2	9	5	9 **110**	8 **140**	0 **10**	260
D_j	120	130	145	125	140	10	670

*La dégénérescence et la méthode CM

Reprenons le problème de transport de Sporcau, mais supposons que $S_1 = 265$ et $S_3 = 235$. La méthode CM s'amorce comme à la section 5A.4: on pose d'abord $x_{13} = 145$, puis $x_{11} = 120$. Lors de cette 2^e attribution, la demande de C_1 est comblée et du même coup sont épuisées les 265 tonnes qui étaient disponibles en L_1. La situation est décrite au tableau 22 : les valeurs dans les marges des rangées C_1 et L_1 sont devenues nulles en même temps.

TABLEAU 22 Méthode CM et dégénérescence : tableau lors de la 2^e attribution

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1 **120**	8	1 **145**	5	4	0 ~~265~~
L_2	5	5	3 –	6	7	160
L_3	2	9	5 –	9	8	235
D_j	~~120~~ 0	130	~~145~~ 0	125	140	660

On en est maintenant à l'étape 4 de la méthode CM pour cette attribution, où il s'agit d'inscrire des tirets «dans les cases de la rangée déclarée saturée qui étaient encore disponibles». Les inscrira-t-on dans les cases de C_1, dans celles de L_1, ou dans celles de ces deux rangées ? On doit se limiter à l'une seulement de ces rangées, sinon la solution résultante comporterait insuffisamment de variables de base. On choisira de façon aléatoire entre C_1 et L_1. Convenons, pour fixer les idées, que l'on inscrit des tirets dans (1; 2), (1; 4) et (1 ; 5). La prochaine attribution se fera dans la case (3 ; 1), qui est la case disponible de coût minimal : on pose donc $x_{31} = 0$, car c'est la portion non satisfaite de la demande en C_1. La méthode se poursuit avec des attributions, dans cet ordre, aux cases (2 ; 2), (2 ; 4), (3 ; 5) et (3 ; 4). La solution de base résultante est donnée au tableau 23 : elle comporte 8 variables de base comme exigé, mais l'une d'entre elles, x_{31}, prend la valeur 0.

TABLEAU 23 Méthode CM et dégénérescence : solution de base

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1 **120**	8 –	1 **145**	5 –	4 –	265
L_2	5 –	5 **130**	3 –	6 **30**	7 –	160
L_3	2 **0**	9 –	5 –	9 **95**	8 **140**	235
D_j	120	130	145	125	140	660

***La dégénérescence et la méthode PEN**

Reprenons le problème de transport de Sporcau, mais supposons cette fois que les coûts unitaires de la colonne C_5 soient modifiés de la façon suivante :

$$c_{15} = 8 \quad \text{et} \quad c_{25} = 9 \quad \text{et} \quad c_{35} = 5.$$

La méthode PEN s'amorce comme à la section 5A.4 : on pose d'abord $x_{31} = 120$, puis $x_{13} = 145$. Des changements surviennent lors de la 3^{e} attribution : comme indiqué dans le tableau 24, la rangée de pénalité maximale est L_3, et la case disponible de coût minimal dans cette ligne est (3 ; 5). La méthode PEN dicte de poser $x_{35} = 140$. La demande de C_5 est ainsi comblée et du même coup sont épuisées les 260 tonnes qui étaient disponibles en L_3. Cette saturation simultanée d'une ligne et d'une colonne pose problème. On devra considérer que l'une est officiellement saturée et que l'autre ne l'est pas, même si le nombre inscrit dans sa marge est nul. Comment répartir les rôles entre L_3 et C_5? Une fois effectuée l'attribution de 140 unités à la case (3; 5), la case de coût minimal parmi les cases disponibles appartenant à l'une ou l'autre des rangées candidates – il s'agit de (1; 5) – est située dans la colonne C_5; on convient que c'est l'autre rangée, soit L_3, qui officiellement sera déclarée saturée. Le tableau 25 décrit le tableau de transport à la fin de cette attribution.

TABLEAU 24 **Méthode PEN et dégénérescence : tableau pendant la 3e attribution**

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	
L_1	[1] –	[8]	[1] **145**	[5]	[8]	95 ~~240~~	3
L_2	[5] –	[5]	[3] –	[6]	[9]	160	1
L_3	[2] **120**	[9]	[5] –	[9]	[5]	140 ~~260~~	4
D_j	~~120~~ 0	130	~~145~~ 0	125	140	660	
	*	3	*	1	3		

TABLEAU 25 **Méthode PEN et dégénérescence : tableau après la 3e attribution**

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	
L_1	[1] –	[8]	[1] **145**	[5]	[8]	95 ~~240~~	3
L_2	[5] –	[5]	[3] –	[6]	[9]	160	1
L_3	[2] **120**	[9] –	[5] –	[9] –	[5] **140**	0 ~~260~~	*
D_j	~~120~~ 0	130	~~145~~ 0	125	~~140~~ 0	660	
	*	3	*	1	1		

Dans le tableau 25, les rangées de pénalité maximale sont L_1 et C_2; dans ces rangées, il y a deux cases disponibles de coût minimal, soit (1; 4) et (2; 2). Conformément à la règle hiérarchique mentionnée en 5A.4, on considère maintenant la valeur maximale que l'on pourrait attribuer à chacune des cases encore en lice: en (1; 4), cette valeur maximale est 95, et en (2; 2), elle est 130. C'est donc la case (2; 2) qui sera retenue comme prochaine case de base, et l'on posera x_{22} = 130. La méthode PEN se poursuit avec des attributions aux cases (1; 4), (2 ; 4) et (2 ; 5). La solution de base résultante est donnée au tableau 26 : elle comporte 8 variables de base comme exigé, mais l'une d'entre elles, soit x_{25}, prend la valeur 0.

TABLEAU 26 Méthode PEN et dégénérescence : solution de base

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	1 –	8 –	1 **145**	5 **95**	8 –	240
L_2	5 –	5 **130**	3 –	6 **30**	9 **0**	160
L_3	2 **120**	9 –	5 –	9 –	5 **140**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La dégénérescence et le choix de la variable sortante

Dans tous les exemples considérés jusqu'à présent, une seule variable de base pouvait aspirer au rôle de variable sortante. Cependant, il n'en est pas toujours ainsi. À titre d'illustration, reprenons le tableau 10, qui donne une solution optimale du problème de Sporcau. Deux variables hors base y admettent des coûts marginaux nuls, ce qui suggère que le problème possède plus d'une solution optimale. À la section 5A.3, nous avons utilisé la case (3 ; 3) pour amorcer une itération additionnelle et construire une 2[e] solution de base optimale. Qu'arriverait-il si, comme variable entrante, nous prenions plutôt x_{14}, dont le coût marginal aussi est nul ? Le cycle de changement est représenté au tableau 27. On constate que Δ ne peut excéder 95 et que deux variables de base, soit x_{15} et x_{34}, deviendront nulles simultanément lorsqu'on posera $x_{14} = 95$.

TABLEAU 27 Cycle de changement de x_{14} dans la solution optimale de Sporcau

de \ vers	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	3 1	4 8	1 **145**	0 5 Δ	4 **95 – Δ**	240
L_2	6 5	5 **130**	1 3	6 **30**	2 7	160
L_3	2 **120**	1 9	0 5	9 **95 – Δ**	8 **45 + Δ**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

Mais on ne peut admettre que x_{15} et x_{34} seront toutes deux hors base dans le tableau résultant de l'itération, car celui-ci ne comporterait alors que 7 cases de base, au lieu des 8 attendues. Il faut donc que l'une seulement des variables x_{15} ou x_{34} soit déclarée hors base et que l'autre reste dans la base tout en prenant la valeur 0. On convient généralement de conserver dans la base celle des variables candidates dont le coût unitaire est minimal. Ici, $c_{15} < c_{34}$: ainsi, x_{15} restera dans la base et x_{34} agira à titre de variable sortante. Le résultat de l'itération est donné au tableau 28.

TABLEAU 28 Solution optimale avec x_{14} dans la base

vers / de	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
L_1	3 1	4 8	1 **145**	5 **95**	4 **0**	240
L_2	6 5	5 **130**	1 3	6 **30**	2 7	160
L_3	2 **120**	1 9	0 5	0 9	8 **45**	260
D_j	120	130	145	125	140	660

La dégénérescence et les itérations

Lorsque le point de départ d'une itération est une solution de base dégénérée, trois cas peuvent se présenter. Les tableaux 29 à 31 donnent un exemple de chacun.

Cas n° 1

Le cycle de changement contient une ou plusieurs variables de base nulles, dont l'une au moins diminuerait si la variable entrante prenait une valeur positive. Le tableau 29, où x_{25} est la variable entrante, illustre une telle situation. On observe que la non-négativité de la variable de base x_{31} limite à 0 la valeur maximale de Δ. L'itération consiste à transférer la valeur 0 de la case (3 ; 1) à la case (2 ; 5) ; la solution résultant de l'itération est égale à la solution de départ, sauf que la liste des variables de base a été modifiée.

TABLEAU 29 Dégénérescence et itérations: cas n° 1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	**20 + Δ**				**10 – Δ**
L_2		**20 – Δ**		**30**	+ Δ
L_3	**0 – Δ**	**5 + Δ**	**15**		
D_j	20	25	15	30	10

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
20				**10**	30
	20		**30**	**0**	50
	5	**15**			20
20	25	15	30	10	100

Cas n° 2

Le cycle de changement contient une ou plusieurs variables de base nulles, mais toutes augmentent en même temps que la variable entrante. Le tableau 30, où x_{14} est la variable entrante, illustre une telle situation.

TABLEAU 30 Dégénérescence et itérations: cas n° 2

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	**20 – Δ**			+ Δ	**10**
L_2		**20 + Δ**		**30 – Δ**	
L_3	**0 + Δ**	**5 – Δ**	**15**		
D_j	20	25	15	30	10

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
15			**5**	**10**	30
	25		**25**		50
5		**15**			20
20	25	15	30	10	100

Cas n° 3

Le cycle de changement ne contient aucune variable de base nulle. Le tableau 31, où x_{23} est la variable entrante, illustre une telle situation. La solution de base résultant de l'itération est alors nécessairement dégénérée.

TABLEAU 31 Dégénérescence et itérations: cas n° 3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	**20**				**10**
L_2		**20 – Δ**	+ Δ	**30**	
L_3	**0**	**5 + Δ**	**15 – Δ**		
D_j	20	25	15	30	10

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i
20				**10**	30
	5	**15**	**30**		50
0	**20**				20
20	25	15	30	10	100

Exercices de révision

1. Solution de base initiale

La partie centrale du tableau suivant donne les coûts unitaires de transport entre des usines et des entrepôts. Dans les marges, on retrouve la capacité des usines, ainsi que la demande des entrepôts.

Usine	Entrepôt				Capacité
	1	**2**	**3**	**4**	
1	2	4	9	6	**40**
2	3	3	2	5	**20**
3	1	3	4	8	**70**
Demande	**55**	**25**	**45**	**5**	**130**

Trouver une solution de base initiale à l'aide de chacune des méthodes heuristiques suivantes.

(a) Méthode du coin nord-ouest

(b) Méthode des coûts minimaux

(c) Méthode des pénalités

2. Une itération de l'algorithme du transport

Pour chacun des tableaux de transport suivants, effectuer une itération de l'algorithme du transport : calculer d'abord les coûts marginaux des variables hors base à l'aide de la méthode des potentiels; puis, déterminer la variable entrante, sa limite, ainsi que la variable sortante; construire le tableau de transport subséquent; enfin, calculer de combien le coût total z diminue lors de cette itération.

(a) Utiliser le tableau obtenu à l'exercice 1(b).

(b) Utiliser le tableau ci-dessous.

vers / de	C_1		C_2		C_3		C_4		C_5		S_i
L_1	**50**	3		5		5		6		6	50
L_2	**31**	6		5	**22**	9	**14**	3		9	67
L_3		4	**13**	2		5		8	**16**	2	33
D_j	85		13		22		14		16		150

(c) Utiliser le tableau initial obtenu en appliquant la méthode du coin nord-ouest au problème de transport dont les données (coûts unitaires, capacités et demandes) sont celles décrites ci-dessous.

Usine	**Entrepôt**				**Capacité**
	1	**2**	**3**	**4**	
1	3	4	3	1	**53**
2	6	6	4	2	**42**
3	2	1	6	4	**27**
4	5	8	8	6	**33**
Demande	**10**	**80**	**60**	**50**	

3. L'algorithme du transport et la dégénérescence

(a) Trouver une solution de base initiale en appliquant la méthode du coin nord-ouest au problème de transport dont les données (coûts unitaires, capacités et demandes) sont celles décrites ci-dessous.

Usine	Entrepôt				Capacité
	1	**2**	**3**	**4**	
1	7	3	3	2	**30**
2	3	4	7	7	**35**
3	5	3	1	9	**30**
4	6	4	8	5	**55**
Demande	**20**	**45**	**45**	**40**	**150**

(b) Trouver une solution de base initiale en appliquant la méthode des coûts minimaux au problème de transport dont les données (coûts unitaires, capacités et demandes) sont celles décrites ci-dessous.

Usine	Entrepôt				Capacité
	1	**2**	**3**	**4**	
1	2	3	6	5	**30**
2	3	4	4	7	**25**
3	7	3	2	3	**45**
4	6	4	9	8	**75**
Demande	**30**	**60**	**45**	**40**	**175**

(c) Déterminer une solution optimale du problème de transport considéré en (b). Est-ce qu'il existe d'autres solutions optimales ? Si oui, en donner deux ; sinon, dire pourquoi.

*4. Problèmes de transport et maximisation

Le tableau ci-dessous donne, dans sa partie centrale, les marges unitaires lorsque le produit est fabriqué à l'usine *i* et transporté au point de vente *j* pour y être vendu. Dans les marges, on trouve la capacité des usines et la demande de chaque entrepôt.

On cherche un plan de fabrication et de transport qui maximise le profit total. Trouver une solution de base initiale en adaptant la méthode des coûts minimaux; puis, trouver une solution optimale et le profit total associé. Enfin, donner une seconde solution optimale, s'il en existe.

Usine	Point de vente				Capacité
	1	**2**	**3**	**4**	
1	3	12	11	17	**45**
2	7	2	14	16	**108**
3	10	8	11	22	**33**
Demande	**66**	**31**	**17**	**72**	**186**

5. Les hauts fourneaux

Reprenons le contexte de l'exercice de révision 1 de la section 5.3.

(a) Présenter cette situation comme un problème de transport.

(b) Déterminer un plan de production dont le coût soit minimal. (On suggère de construire la solution de base initiale en appliquant la méthode des coûts minimaux.)

(c) Si le coût du traitement des voitures dans le haut fourneau 2 passe de 330 $ à 260 $ la tonne, de combien varieront les coûts quotidiens d'exploitation ?

*6. La compagnie Pétrolco

La compagnie Pétrolco possède une flotte de 20 pétroliers de tonnage moyen qu'elle utilise pour transporter du pétrole brut à partir de certains ports du Moyen-Orient vers des grandes villes d'Amérique du Nord. Mohamed, le responsable de l'organisation des transports, doit déterminer la façon dont les commandes en brut du prochain mois seront satisfaites. Le tableau suivant résume les données dont doit tenir compte Mohamed: les demandes et disponibilités sont en millions de litres; la section centrale donne le profit (en cents) obtenu par l'acheminement d'un litre à chaque destination finale à partir de chaque port d'origine.

	Profit (en ¢/litre) selon l'origine et la destination					Disp.
	Montréal	New York	Détroit	Toronto	Philadelphie	
Abu Zabi	12	11	8	6	14	**1,2**
Al-Dawha	10	10	15	8	12	**1,7**
Manana	8	9	14	7	14	**0,3**
Koweit	11	15	13	11	13	**2,0**
Demande	**0,5**	**1,7**	**0,3**	**1,5**	**1,0**	

(a) Déterminer un plan de transport qui maximise le profit de Pétrolco. (On suggère de construire la solution de base initiale en appliquant la méthode des pénalités.)

(b) Peut-on trouver plus d'un plan optimal ? Si oui, en calculer un deuxième.

(c) La demande de Détroit s'avère erronée : il faut y expédier 1,3 million de litres et non 0,3 million de litres. Du coup, Mohamed se rend compte que le pétrole disponible pour le prochain mois ne peut satisfaire à toute la demande. Mais une entente contractuelle, décrite au tableau ci-dessous, oblige Pétrolco à rembourser les clients dont la demande n'est pas satisfaite.

Dédit à payer (en ¢/litre) pour toute demande non satisfaite				
Montréal	New York	Détroit	Toronto	Philadelphie
3	4	2	3	4

Dans ce contexte, quel est le plan de transport optimal.

7. Le paradoxe « *More for Less* »

Une entreprise dispose de deux usines, U_1 et U_2, dont elle emmagasine la production dans trois entrepôts, E_1, E_2 et E_3. Le tableau suivant donne les coûts unitaires de transport entre les usines et les entrepôts.

	1	**2**	**3**
1	5	1	5
2	13	9	3

La production atteint 30 000 unités dans chaque usine. Les entrepôts ont une capacité de 20 000 unités chacun.

(a) Trouver un plan qui minimise les coûts de transport des 60 000 unités.

(b) À supposer que la production de l'usine U_1 grimpe à 40 000 unités et que la capacité de E_3 soit portée à 30 000 unités, de quelle façon devrait-on procéder pour minimiser les coûts de transport des 70 000 unités produites ?

(c) Commenter les résultats des questions précédentes, qui sont paradoxaux à première vue : en effet, sans que l'on ait changé les coûts unitaires, il en coûte moins cher en (b) et l'on transporte 10 000 unités de plus.