3D Solutions optimales multiples

3D.1 Unicité de la solution optimale du modèle (FRB)

Le modèle (FRB) admet une solution optimale unique. En effet (voir page 182), l'algorithme du simplexe se termine par un lexique optimal, dont la fonction-objectif z s'écrit ainsi :

$$z = 27\,000 - 30\,e_1 - 350\,e_2. \qquad (1)$$

Que les améliorations marginales des différentes variables hors base soient toutes ≤ 0 permet de conclure que la solution de base (15; 10; 0; 0; 3; 20) associée à ce lexique est optimale. Qu'en plus ces améliorations marginales soient non nulles garantit l'unicité de la solution optimale.

En effet, la solution (15; 10; 0; 0; 3; 20) donne à z la valeur 27 000 puisque les variables hors base e_1 et e_2 y sont nulles. Mais, en toute autre solution admissible (x_1; x_2; e_1; e_2; e_3; e_4), au moins l'une des variables hors base diffère de 0 et celle-ci ne peut être que positive en vertu des contraintes de non-négativité. Le terme correspondant du second membre de (1) est alors négatif. Par conséquent, la valeur de z est nécessairement inférieure à 27 000 en une telle solution, ce qui montre l'unicité de la solution optimale de (FRB).

Il existe des modèles linéaires qui possèdent plus d'une solution optimale. Illustrons ce phénomène à l'aide du modèle (FRB') suivant, obtenu de (FRB) en fixant à 1500 $ la tonne le profit de la tuyauterie, plutôt que 1200 $/t.

$$\text{Max } z' = 1\,000\,x_1 + 1\,500\,x_2 \qquad (2)$$

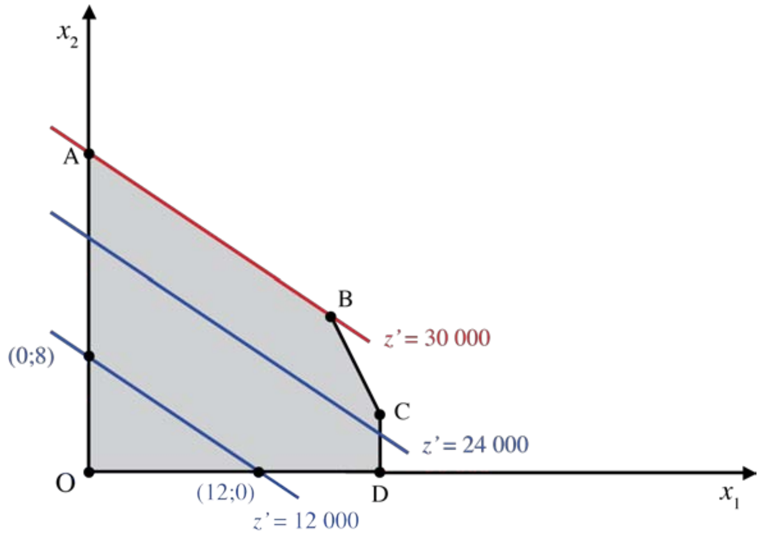
sous les contraintes:

$$\begin{array}{lll} 10\,x_1 + 5\,x_2 \leq 200 & \text{(ébarbage)} & (3) \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 60 & \text{(peinture)} \qquad \text{(FRB')} & (4) \\ x_1 \leq 18 & \text{(demande de tuyauterie)} & (5) \\ x_2 \leq 30 & \text{(commande de gueuses)} & (6) \\ x_1,\ x_2 \geq 0. & & (7) \end{array}$$

3D.2 Analyse graphique du modèle (FRB')

La figure 1 ci-dessous donne la région admissible de (FRB'), ainsi que quelques courbes de niveaux de la fonction-objectif z'. Celles-ci sont parallèles au segment [A; B] de la droite associée à la contrainte (4).

FIGURE 1 La région admissible du modèle (FRB')



Le maximum de z' s'obtient en recherchant la courbe de niveau la plus à droite possible qui ait au moins un point en commun avec la région admissible. Il s'agit de la courbe de niveau « $z' = 30\,000$ » passant par les points A et B. Ainsi les sommets A = (0; 20) et B = (15; 10) constituent deux solutions optimales de (FRB'). Il existe une infinité de solutions optimales, car les autres points du segment [A; B] donnent à z' la même valeur de 30 000. Rappelons que tout point P du segment [A; B] s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathrm{P} = \lambda\,\mathrm{A} + (1-\lambda)\,\mathrm{B} \quad \text{où } \lambda \in [0; 1]$$

ou encore

$$\mathrm{P} = (15 - 15\lambda;\ 10 + 10\lambda) \quad \text{où } \lambda \in [0; 1]. \tag{8}$$

La fonction-objectif z' vaut bien 30 000 en tout point P défini par (8) puisque :

$$z' = 1000(15 - 15\lambda) + 1500(10 + 10\lambda) = 30\,000.$$

Les extrémités A et B du segment correspondent respectivement aux valeurs 1 et 0 du paramètre λ. Lorsque $0 < \lambda < 1$, la formule (8) donne un point P situé entre A et B, qui est optimal sans être un point extrême. Le théorème fondamental (voir page 155) n'interdit pas une telle situation; il stipule seulement qu'au moins une des solutions optimales est un point extrême.

3D.3 Analyse algébrique du modèle

Mais comment détecter, sans recourir à la représentation graphique, que le modèle (FRB') possède plus d'une solution optimale ? Comment réagit l'algorithme du simplexe à cette propriété ?

Lors de la 1re itération, la variable x_2 entre dans la base. Voici le lexique résultant du pivotage.

$$\text{Max } z' = 30\,000 + 0\,x_1 - 500\,e_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lcrcrcr}
e_1 & = & 100 & - & 6{,}67\,x_1 & + & 1{,}67\,e_2 \\
x_2 & = & 20 & - & 0{,}67\,x_1 & - & 0{,}33\,e_2 \\
e_3 & = & 18 & - & x_1 & & \\
e_4 & = & 10 & + & 0{,}67\,x_1 & + & 0{,}33\,e_2
\end{array}$$

$$x_1\,,\ x_2\,,\ e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ e_4\ \geq\ 0.$$

La solution de base associée, qui correspond au sommet A = (0; 20), est optimale puisque les améliorations marginales des variables hors base x_1 et e_2 sont ≤ 0. Mais celle x_1 de est nulle : par conséquent, la valeur de z' demeure inchangée lorsque x_1 prend des valeurs positives; et, en autant que x_1 n'augmente pas au-delà de la limite découlant de la non-négativité des variables de base, toute valeur positive donnée à x_1 conduit à une nouvelle solution optimale. Si x_1 entre dans la base pour y prendre la valeur limite 15, le pivotage reprend les calculs effectués lors de la 2e itération de (FRB), sauf ceux qui réfèrent aux améliorations marginales : la solution de base associée correspond encore au sommet B = (15; 10) et la fonction-objectif z' s'écrit maintenant :

$$z' = 30\,000 + 0\,e_1 - 500\,e_2.$$

À nouveau les améliorations marginales des variables hors base sont toutes ≤ 0 et l'une d'elles est nulle. La solution de base associée au sommet B est donc elle aussi optimale pour z'.

Toute valeur de x_1 comprise entre 0 et la limite 15 donne une solution optimale de (FRB'), l'autre variable hors-base e_2 étant maintenue à 0 et les variables de base étant calculées à partir des 4 équations du lexique associé au sommet A. Par exemple, si l'on pose $x_1 = 3$:

$$e_1 = 100 - 6{,}67\,x_1 = 100 - (6{,}67 \times 3) = 80$$

$$x_2 = 20 - 0{,}67\,x_1 = 20 - (0{,}67 \times 3) = 18$$

$$e_3 = 18 - x_1 = 18 - (1 \times 3) = 15$$

$$e_4 = 10 + 0{,}67\,x_1 = 10 + (0{,}67 \times 3) = 12.$$

La solution (3; 18; 80; 0; 15; 12) correspond au point P du segment [B; C] où le paramètre λ satisfait la condition suivante :

$$1 - \lambda = x_1 / \mathit{limite} = 3 / 15 = 0{,}2.$$

En substituant 0,8 à λ dans l'équation (8), on obtient le point P = (3; 18). Noter que (3; 18) n'est pas un point extrême, de même que le vecteur correspondant (3; 18; 80; 0; 15; 12) n'est pas une solution de base.

Le nombre de lexiques optimaux peut être très grand et le calcul de toutes les solutions optimales est un problème difficile à résoudre en général. L'obtention de plusieurs solutions optimales permet d'en choisir une qui répond à des critères qualitatifs ou qui satisfait à des contraintes non incorporées dans le modèle.

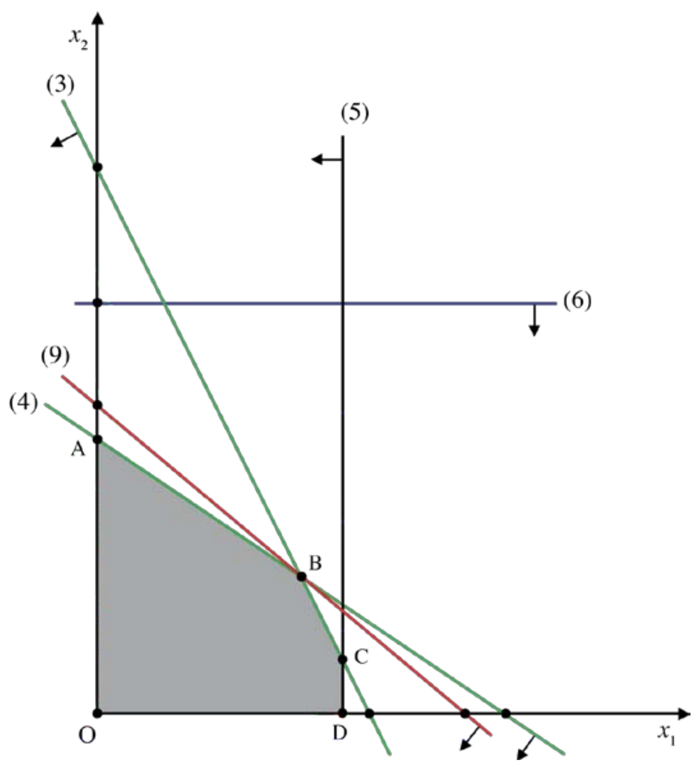
3D.4 Dégénérescence et solutions optimales multiples

Pour montrer que le modèle (FRB') admet plusieurs solutions optimales, nous avons utilisé ci-dessus le fait que, dans un lexique optimal, l'une des variables hors base possédait une amélioration marginale nulle. Cette condition nécessaire n'est cependant pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant. Nous reprenons le contexte de (FRB), mais nous supposons que la fonderie comporte un 3^e atelier disposant de 135 heures la semaine prochaine et qu'une tonne de tuyauterie (resp. de gueuses) exige 5 heures (resp. 6 h) dans cet atelier. Nous noterons (P) le modèle obtenu de (FRB) par l'adjonction de la contrainte (9) traduisant l'exigence que le temps requis par le plan de production (x_1; x_2) ne dépasse pas le temps disponible dans le 3^e atelier :

$$5\,x_1 + 6\,x_2 \leq 135. \tag{9}$$

La figure 2 ci-dessous représente les droites associées aux inéquations (3) à (6), et (9). La région admissible de (P) est le polygone OABCD, tout comme (FRB), et le sommet B = (15; 10) est l'unique optimum de (P). Noter que trois des droites associées aux contraintes de (P) passent par B, qui est donc dégénéré (voir annexe 3B pour la définition de point extrême dégénéré).

FIGURE 2 La région admissible du modèle (P)



Voici un lexique optimal, dont la solution de base correspond au sommet B.

$$\text{Max } z = 27\,000 + 0\, e_2 - 200\, e_5 \tag{10}$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 0 - 11{,}67\, e_2 + 6{,}67\, e_5 \tag{11}$$

$$x_2 = 10 - 1{,}67\, e_2 + 0{,}67\, e_5 \tag{12}$$

$$e_3 = 3 - 2\, e_2 + e_5 \tag{13}$$

$$e_4 = 20 + 1{,}67\, e_2 - 0{,}67\, e_5 \tag{14}$$

$$x_1 = 15 + 2\, e_2 - e_5 \tag{15}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ e_1 ,\ e_2 ,\ e_3 ,\ e_4 ,\ e_5 \ \geq\ 0. \tag{16}$$

Le fait que l'amélioration marginale de la variable hors base e_2 soit nulle dans l'équation (10) laisserait croire que l'on pourrait obtenir une autre solution optimale en entrant cette variable dans la base. Mais la non-négativité de e_1 et l'équation (11) limitent à 0 la croissance de e_2. Voici le lexique résultant du pivotage.

$$\text{Max } z = 27\,000 + 0\, e_1 - 200\, e_5 \tag{17}$$

sous les contraintes :

$$e_2 = 0 - 0{,}0857\, e_1 - 0{,}5714\, e_5 \tag{18}$$

$$x_2 = 10 + 0{,}1429\, e_1 - 0{,}2857\, e_5 \tag{19}$$

$$e_3 = 3 + 0{,}1714\, e_1 - 0{,}1429\, e_5 \tag{20}$$

$$e_4 = 20 - 0{,}1429\, e_1 + 0{,}2857\, e_5 \tag{21}$$

$$x_1 = 15 + 0{,}1714\, e_1 + 0{,}1429\, e_5 \tag{22}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ e_1 ,\ e_2 ,\ e_3 ,\ e_4 ,\ e_5 \ \geq\ 0. \tag{23}$$

La solution de base associée à ce dernier lexique est identique à celle du lexique (10)-(16). L'itération a changé la liste des variables de base, mais pas les valeurs des différentes variables, ni celle de la fonction-objectif. Tel que mentionné dans l'annexe 3B, plusieurs lexiques sont associés à un point extrême comme B. Dans le lexique (10)-(16), on considère que B est défini comme le sommet situé à l'intersection des droites associées aux contraintes (4) et (9); que la valeur nulle de e_1, ou encore l'appartenance de B à la droite associée à (3), sont anecdotiques. Dans le lexique (17)-(23) résultant de l'itération, ce qui est considéré anecdotique, c'est le fait que B soit situé sur la droite associée à (4) et que e_2 prenne la valeur 0.

Le fait que la solution de base optimale soit dégénérée ne garantit pas l'unicité de la solution optimale. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le modèle (P') obtenu de (P) en remplaçant z par la fonction-objectif $z' = 1\,000\, x_1 + 1\,500\, x_2$. Voici un lexique optimal de (P'), dont la solution de base correspond au sommet B.

$$\text{Max } z' = 30\,000 - 500\, e_2 + 0\, e_5 \tag{24}$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 0 - 11{,}67\, e_2 + 6{,}67\, e_5 \tag{25}$$

$$x_2 = 10 - 1{,}67\, e_2 + 0{,}67\, e_5 \qquad (26)$$

$$e_3 = 3 - 2\, e_2 + e_5 \qquad (26)$$

$$e_4 = 20 + 1{,}67\, e_2 - 0{,}67\, e_5 \tag{28}$$

$$x_1 = 15 + 2\, e_2 - e_5 \tag{29}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5 \ \geq\ 0. \tag{30}$$

Si e_5 est choisie comme variable entrante, la valeur limite est 15 et x_1 sort de la base. Voici le lexique résultant du pivotage.

$$\text{Max } z' = 30\,000 + 0\, x_1 - 500\, e_2 \tag{31}$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 100 - 6{,}67\, x_1 + 1{,}67\, e_2 \tag{32}$$

$$x_2 = 20 - 0{,}67\, x_1 - 0{,}33\, e_2 \tag{33}$$

$$e_3 = 18 - 1\, x_1 \tag{34}$$

$$e_4 = 10 + 0{,}67\, x_1 + 0{,}33\, e_2 \tag{35}$$

$$e_5 = 15 - 1\, x_1 + 2\, e_2 \tag{36}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5 \ \geq\ 0. \tag{37}$$

Ce lexique est optimal et sa solution de base correspond au sommet A = (0; 20). Ainsi, le modèle (P'), tout comme (FRB'), admet plus d'une solution optimale. Le fait que B soit dégénéré ou non ne change rien à l'affaire.

3D.5 Un principe général qui garantit l'existence de solutions optimales multiples

Les exemples précédents permettent de dégager le principe général suivant.

> **Un modèle linéaire continu admet plus d'une solution optimale quand, dans un lexique optimal, l'une des variables hors base**

- **admet une amélioration marginale nulle**
- **et peut prendre une valeur positive lorsque considérée comme variable entrante.**

La solution de base associée au lexique résultant du pivotage est optimale, ainsi que tous les points du segment de droite entre les deux solutions de base optimales. Par conséquent, il existe alors une infinité de solutions optimales.

Exiger que le lexique soit optimal signifie que les améliorations marginales des variables hors base sont toutes

- non négatives (≥ 0) dans le cas d'un modèle de maximisation
- et non positives (≤ 0) lorsqu'on cherche plutôt à minimiser la fonction-objectif *z*.