**Tutoriel - L’algorithme du transport**

* **Leçon 1. Initialisation. …………………………………………………………….** 1
  + 1. Contexte de l’exemple. Variables de décision. 1
    2. Construction du tableau de transport. 1
    3. Principes généraux de l’algorithme. 2
    4. Construction d’une solution admissible initiale. 2
    5. Solution de base : variables de base et variables hors base. 3
* **Leçon 2. Description d’une itération. ……………………………………………..** 3
  + 1. Rappels : contexte; tableau de transport; solution de base initiale. 3
    2. Cycle de changement d’une variable hors base; impact unitaire sur le coût total. 4
    3. Début de l’itération 1 : choix de la variable entrante. 5
    4. Cycle de changement; valeur maximale de Δ; choix de la variable sortante. 5
    5. Le tableau résultant; diminution du coût total. 5
    6. Fin de l’itération 1 : calcul des coûts marginaux et test d’optimalité. 6
    7. Itération : un résumé. 6
* **Leçon 3. Calcul des coûts marginaux. ……………………………………………. 6**
  + 1. Rappels : cycle de changement et coût marginal de la variable *x*12. 6
    2. La méthode des potentiels. 6
    3. Calcul des valeurs des variables duales dans le cas du tableau 0 de l’exemple. 7
    4. Calcul des coûts marginaux dans le cas du tableau 0 de l’exemple. 8
* **Leçon 4. Résolution de l’exemple à l’aide du didacticiel. ………………………… 8**
  + 1. Démarrage du didacticiel : choix du problème à traiter, dimensions du tableau. 8
    2. Rappels : construction du tableau 0; coûts marginaux et test d’optimalité. 9
    3. Itération 1, pivotage. 10
    4. Itération 1, test d’optimalité. 11
    5. Itération 2, pivotage. 11
    6. Itération 2, test d’optimalité. 12
    7. Itération 3, pivotage. 12
    8. Itération 3, fin : test d’optimalité. 12
* **Leçon 5. Cas particuliers. …………………………………………………………. 13**
  + 1. Problèmes non équilibrés. 13
    2. Solution de base dégénérée. 14
    3. Modèles avec solutions optimales multiples. 15
* **Leçon 6. Autres heuristiques pous la construction d’une solution initiale. ……. 16**
  + 1. La méthode des coûts minimaux. 16
    2. La méthode des pénalités. 17
* **Tableaux. ……………………………………………………………………………. 19**
* **Leçon 1. Initialisation.**
  1. **Contexte** **de l’exemple. Variables de décision.**

Nous illustrerons l’algorithme du transport à l’aide d’un exemple numérique simple tiré du manuel *La recherche opérationnelle* (tableaux T1 et T2). Nous consi­dérons une entreprise qui fabrique un certain produit dans 3 laboratoires L1, L2 et L3. Nous supposerons que 660 unités au total sont disponibles dans les 3 laboratoires et que ces 660 unités doivent être expédiées à 5 centres de distribution On notera que, dans cet exemple, la demande totale est égale à l’offre totale. On dira que le *problème* est *équilibré*.

L’entreprise cherche à expédier les 660 unités des laboratoires aux centres de façon à minimiser le coût total de transport. Le tableau suivant (tableau T2) donne les coûts unitaires de transport : la valeur 8 à l’intersection de la ligne 1 et de la colonne 2 indique qu’il en coûte 8 unités monétaires, c’est-à-dire 8 $, ou 8 k$, ou encore 8 euros selon le contexte, qu’il en coûte donc 8 unités monétaires pour transporter 1 unité du laboratoire 1 au centre 2. On dira que ce nombre 8 occupe la case (1; 2). En mathématiques, lorsqu’on réfère aux entrées d’un tableau, le 1er indice correspond généralement au numéro de la ligne, et le second, au numéro de la colonne.

Le problème de l’entreprise se décrit comme un modèle linéaire dont les variables de décision, notées *xij*, représentent le nombre d’unités à expédier du laboratoire *i* au centre *j*. Par exemple, *x*12 indique combien d’unités seront expédiées du laboratoire 1 au centre 2.

* 1. **Construction du tableau de transport.**

Les calculs afférents à l’algorithme du transport sont traditionnellement présentés sous forme de tableaux. Pour un problème donné, nous utiliserons un tableau dans lequel une ligne est associée à chaque origine et une colonne, à chaque destination. Les origines, dans notre contexte, sont les laboratoires; dans d’autres, il s’agira d’usines, de raffineries, d’entrepôts… Les destinations de notre exemple sont les centres de distribution; ce sera dans certains problèmes des entrepôts, des magasins, des points de vente…

Ainsi, pour traiter notre exemple, nous introduisons un tableau comportant 3 lignes et 5 colonnes (tableau T3). Dans les marges sont donnés le nombre d’unités disponibles à chaque laboratoire, ainsi que la demande en chaque centre. De plus, nous reportons dans le coin supérieur droit de chaque case le coût unitaire associé : par exemple, la case (1; 2) située à l’intersection de la ligne L1 et de la colonne C2 contiendra le nombre 8 représentant le coût unitaire pour expédier 1 unité du laboratoire 1 au centre 2.

Le nombre d’unités livrées d’un laboratoire à un centre sera reporté en gras dans la section inférieure de la case correspondante. Ainsi, la décision d’expédier 20 unités du laboratoire 1 au centre 2 sera traduite par l’inscription de la valeur 20 dans la case (1; 2). Cette décision est réaliste, car la quantité 20 dont on parle est inférieure à la fois à l’offre du laboratoire 1 et à la demande du centre 2. Enfin, le coût de cette décision est obtenu en multipliant le coût unitaire 8 par la quantité 20 : ce coût s’élève donc à 160.

Une *solution* d’un problème de transport est une liste de valeurs à inscrire dans les cases du tableau de transport. Une telle *solution* est dite *admissible* lorsque, dans tous les cas, la somme des valeurs dans une ligne est égale à l’offre et la somme des valeurs dans une colonne est égale à la demande.

**1.3 Principes généraux de l’algorithme.**

L’algorithme du transport cherche à construire itérativement des solutions admissibles dont le coût est de plus en plus faible. En un certain nombre d’étapes, il atteindra, du moins nous l’espérons, une solution optimale.

Chaque solution est construite à partir de la précédente, en modifiant la quantité affichée dans une case et en procédant aux ajustements requis pour conserver l’admissibilité de la solution.

Évidemment, cette procédure présuppose que nous disposions d’une solution admissible initiale. Nous nous intéressons maintenant à la tâche de construire une telle solution initiale.

**1.4 Construction d’une solution admissible initiale.**

Plusieurs méthodes ont été proposées pour construire une solution admissible initiale. Nous en décrivons une, qui est particulièrement simple. Elle porte le nom de *méthode du coin nord-ouest*, car elle démarre dans la case occupant le coin supérieur gauche du tableau et, dans une carte géographique, ce coin correspond au nord-ouest.

Donc, nous nous plaçons d’abord dans la case (1; 1). Nous y reportons le nombre 120 puisque cette valeur représente la quantité maximale requise en C1. Ensuite, la *colonne* 1 étant *saturée* (la demande en C1 est comblée), nous nous déplaçons à la case adjacente (1 ; 2) située à droite et nous attribuons à cette case les 120 unités du laboratoire 1 non encore utilisées. Cette fois, c’est la *ligne* 1 qui devient *saturée* (toutes les unités disponibles en L1 ont déjà été attribuées) : nous descendons et allons à la case adjacente (2 ; 2). Nous continuons ainsi de façon itérative… et nous nous arêtons seulement quand une valeur est inscrite dans le coin inférieur droit, à l’opposé de notre point de départ (tableau T5).

Lors de chaque étape, nous attribuons à la case courante la valeur maximale permise par la structure du problème, puis nous nous déplaçons d’une case vers la droite ou vers le bas. Noter que la solution obtenue est admissible : le total des valeurs de chaque rangée est égal à la valeur inscrite dans la marge : par exemple, dans la ligne 2, la somme des trois valeurs 10, 145 et 5 donne bien l’offre 160 du laboratoire 2 ; de même, le centre 4 recevra bien 125 unités, 5 provenant du laboratoire 2 et 120 du laboratoire 3.

Le coût associé à une case est le produit du coût unitaire et de la quantité inscrite dans la case. Le coût total *z* d’une solution est la somme des coûts associés aux différentes cases. Le coût total de la solution initiale que nous venons de construire s’élève à 3 795.

Voici, sous forme résumée, la procédure que nous venons d’appliquer pour construire notre solution initiale :

* amorcer la méthode avec la case située dans le coin supérieur gauche du tableau de transport;
* attribuer le plus d'unités possible à la case courante;
* aller à une case adjacente à la case courante, en se déplaçant soit vers la droite, soit vers le bas; revenir à l'étape précédente.

La méthode s'arrête une fois effectuée l'attribution à la case située dans le coin inférieur droit.

**1.5 Solution de base : variables de base et variables hors base.**

La solution initiale tout juste construite (tableau T5) possède certaines propriétés structurelles qu’on résume en disant qu’il s’agit d’une *solution de base*. Un aspect essentiel des solutions de base est la répartition des cases du tableau de transport en deux catégories : *cases de base* et *cases hors base*. Dans la solution de base initiale tout juste construite, les cases de base sont les 7 cases où sont reportées les quantités à expédier, soit (1; 1), (1; 2), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 4) et (3; 5). De plus, la variable *xij* associée à toute case (*i ; j*) hors base est nulle par définition. Les 8 cases du tableau affiché où n’apparaît aucune valeur sont hors base; l’absence de valeur implique que la variable *xij* correspondante est nulle (tableau T6).

En général, une solution de base comporte *m + n* − 1 cases de base, où *m* dénote le nombre de lignes-origines du tableau et *n*, le nombre de colonnes-destinations. Dans notre exemple, cette formule donne

*m + n* − 1 = 3 + 5 − 1 = 7.

Les tableaux de transport de notre problème comporteront donc 7 cases de base.

La théorie mathématique garantit qu’un problème de transport équilibré admet toujours une solution optimale qui est une solution de base. L’algorithme du transport s’appuie sur cette propriété : le cœur de cet algorithme consiste à transformer une solution de base admissible en une nouvelle solution de base admissible dont le coût total soit inférieur ou égal à celui de l’ancienne.

* **Leçon 2. Description d’une itération.**
  1. **Rappels : contexte; tableau de transport; solution de base initiale.**

Rappelons le contexte de l’exemple numérique utilisé pour illustrer l’algorithme du transport (tableaux T1 et T2). Une entreprise veut expédier un total de 660 unités de 3 laboratoires vers 5 centres de distribution. Le tableau T2 donne les coûts unitaires de transport.

Nous avons convenu de présenter les calculs afférents à l’algorithme du transport sous forme de tableaux. Les tableaux utilisés pour un problème donné comportent une ligne pour chaque origine, et une colonne pour chaque destination. Dans notre exemple, le tableau de transport a 3 lignes et 5 colonnes.

Nous avons construit à la leçon 1 une solution initiale en appliquant le méthode du coin nord-ouest (tableaux T4 et T5) : nous avons amorcé la solution dans le coin supérieur gauche; à chaque étape, nous avons reporté dans la case courante la quantité maximale permise par la structure du problème, puis nous nous sommes déplacés d’une case, soit vers la droite, soit vers le bas.

La solution obtenue ainsi est toujours une solution de base : les 7 cases de notre tableau où sont affichées des valeurs sont dites cases de base; les autres, qui sont vides, sont dites hors base.

* 1. **Cycle de changement d’une variable hors base; impact unitaire sur le coût total.**

L’algorithme du transport, nous l’avons déjà mentionné lors de la leçon 1, cherche à «améliorer» la solution de base courante, à diminuer la valeur de *z* associée. Techniquement, on calcule d’abord l’impact sur *z* de la décision de forcer une case hors base à devenir case de base ; puis, on choisit une des cases hors base qui diminue *z* au rythme le plus rapide.

Considérons, à titre d’exemple (tableau T7), la case hors base (1 ; 3) ; et convenons que Δ unités seront expédiées du laboratoire 1 au centre 3. Quel est l’impact de cette décision ? Tout d’abord, le centre 3 recevra au total 145+Δ unités alors qu’il en demande 145 : par conséquent, il se retrouvera avec un surplus de Δ unités si Δ est positif. Ce qui est un problème. Pour que la solution reste admissible, il faut rééquilibrer le total des quantités apparaissant dans la colonne 3. La seule façon de procéder est de diminuer de Δ unités la valeur reportée dans la case (2 ; 3). Mais la ligne 2 devient alors déséquilibrée, le laboratoire 2 expédiant seulement 160−Δ unités. Pour conserver l’admissibilité de la solution, on reporte +Δ dans la case (2 ; 2) pour rééquilibrer la ligne 2, puis −Δ dans la case (1 ; 2) pour rééquilibrer la colonne 2. Heureux hasard! Ce dernier changement permet de ramener à 240 unités la quantité totale expédiée à partir du laboratoire 1. La suite

(1 ; 3), (2 ; 3), (2 ; 2), (1 ; 2)

des cases impliquées dans ces ajustements est dite *cycle de changement* associé à la case hors base (1 ; 3). La théorie mathématique indique que, dans un tableau du transport, il existe un et un seul cycle de changement pour toute case hors base.

Ce cycle de changement permet de calculer l’impact sur le coût total *z* de la décision de donner à *x*13 la valeur Δ plutôt que 0 : en effet, Δ unités additionnelles seront alors expédiées de L1 à C3 et le coût associé à la case (1 ; 3) augmentera de 1Δ ; par contre, le coût associé à la case (2 ; 3) diminuera de 3Δ, car le nombre d’unités expédiées du laboratoire 2 au centre 3 baissera de Δ ; pour les mêmes raisons, le coût associé à la case (2 ; 2) augmentera de 5Δ, tandis que celui associé à (1 ; 2) diminuera de 8Δ. L’effet net sur *z* est donc égal à

+ 1Δ − 3Δ + 5Δ − 8Δ = −5Δ.

Le coefficient −5 représente la diminution du coût total *z* résultant du fait d’augmenter de 1 unité la quantité expédiée du laboratoire 1 au centre 3 tout en laissant nulles les quantités *xij* associées aux autres cases hors base du tableau. Ce coefficient est appelé *coût marginal* de la case (1 ; 3).

Le cycle de changement associé à une case hors base peut être plus complexe que celui que nous venons de construire. Par exemple, le cycle associé à la case (1 ; 5) est la suite

(1 ; 5), (3 ; 5), (3 ; 4), (2 ; 4), (2 ; 2), ( 1 ; 2).

Le coût marginal de cette case est donc + 4 − 8 + 9 − 6 + 5 − 8, soit − 4.

Cette façon de calculer les coûts marginaux devient fastidieuse lorsqu’on doit l’appliquer un grand nombre de fois. Comme le nombre de cases hors base augmente rapidement avec la taille du tableau, on recourt le plus souvent à une autre approche, dite méthode des potentiels, que nous verrons à la leçon suivante.

* 1. **Début de l’itération 1 : choix de la variable entrante.**

Le coût marginal d’une case hors base mesure, avons-nous dit, l’impact sur le coût total *z* résultant du fait d’augmenter de 1 unité la quantité expédiée associée à cette case tout en laissant nulles les quantités *xij* associées aux autres cases hors base du tableau. Si les coûts marginaux de toutes les cases hors base sont ≥ 0, on conclut qu’il n’est pas possible de diminuer la valeur de *z* et que la solution de base courante est optimale. Si, au contraire, certaines cases hors base admettent un coût marginal négatif, on construira une nouvelle solution de base en choisissant une des cases hors base dont le coût marginal est négatif et en forçant cette case à devenir case de base. La case sélectionnée – ou la variable *xij* associée – sera qualifiée de *case* ou de *variable**entrante*. Évidemment, il est d’usage de retenir comme case entrante l’une des cases hors base dont le coût marginal est négatif et le plus grand possible en valeur absolue.

Revenons à notre solution initiale; et supposons que les coûts marginaux de toutes les cases hors base soient connus (tableau T8). Nous constatons que la case (1 ; 3) est la case hors base du tableau admettant le coût marginal négatif le plus grand en valeur absolue. Il s’agit donc de la case entrante.

* 1. **Cycle de changement; valeur maximale de Δ; choix de la variable sortante.**

Le cycle de changement, que nous avons déjà construit (tableau T9), indique comment sera affectée la solution quand on reporte une valeur Δ positive dans la case (1 ; 3) : nous constatons en particulier que la quantité expédiée du laboratoire 2 au centre 3, de même que la quantité expédiée du laboratoire 1 au centre 2 diminuent. Puisque ces quantités ne peuvent être négatives, il faut que

145−Δ ≥ 0 et 120−Δ ≥ 0,

c’est-à-dire que

Δ ≤ min {145 ; 120} = 120.

Comme notre objectif est de diminuer le coût total *z* le plus possible, nous posons Δ = 120. Voici la solution de base résultante (tableau T11). Par exemple, la valeur dans la case (2;3) est égale à 145−Δ = 25. On notera qu’aucune valeur n’a été reportée dans la case (1 ; 2) : en effet, la valeur associée à cette case est 120−Δ = 120−120 = 0 et on convient de considérer la case (1 ; 2) comme case hors base dans la nouvelle solution. La terminologie classique la qualifie de *case sortante*. Le passage du tableau 0 au tableau 1 est dit *pivotage*. Les tableaux 0 et 1 comportent le même nombre de cases de base : en effet, la case (1 ; 3) est «entrée» dans la base, tandis que la case (1 ; 2) en est «sortie». Il est essentiel pour le calcul des coûts marginaux que le nombre de cases de base soit maintenu constant.

* 1. **Le tableau résultant; diminution du coût total.**

Le coût marginal -5 de la case entrante (1 ; 3) est, par définition, la diminution du coût total *z* résultant du fait d’augmenter de 1 unité la quantité expédiée du laboratoire 1 au centre 3 tout en laissant nulles les quantités *xij* associées aux autres cases hors base du tableau. Comme nous avons posé *x*13 = 120, le coût total *z* diminue de 5 × 120 lors du passage du tableau 0 au tableau 1. Ainsi, le coût total *z* de la solution associée au tableau 1 est :

*z* = 3 795 − (5 × 120) = 3 195.

Noter que ce coût total *z* se calcule également à partir des coûts unitaires et des valeurs des variables dans la nouvelle solution (tableau T11) :

*z* = (1 × 120) + (1 × 120) + (5 × 130) + … + (8 × 140) = 3 195.

* 1. **Fin de l’itération 1 : calcul des coûts marginaux et test d’optimalité.**

Pour compléter l’itération 1, il reste à calculer les coûts marginaux des cases hors base de la nouvelle solution, et à vérifier si cette solution est optimale ou non.

Les coûts marginaux du tableau 1 se calculent soit en construisant les divers cycles de changement associés aux variables hors base, soit en appliquant la méthode des potentiels. Nous reviendrons à la leçon 3 sur cette méthode des potentiels. Pour l’instant, nous nous contentons de supposer connus ces coûts (tableau T12). Puisque les coûts marginaux des cases hors base (3; 1) et (3; 3) sont négatifs, la solution associée au tableau 1 n’est pas optimale. Il sera possible, comme nous le verrons à la leçon 4, de trouver une autre solution admissible, dont le coût total sera moins élevé.

* 1. **Itération : un résumé.**

Une itération est formée des étapes suivantes :

* choix de la variable entrante;
* construction du cycle de changement;
* détermination de la valeur maximale de Δ;
* choix de la variable sortante;
* construction du tableau résultant (il s’agit de remplacer dans le cycle Δ par sa valeur maximale, puis de calculer les nouvelles valeurs des variables);
* calcul de la diminution du coût total *z*;
* calcul des coûts marginaux;
* test d’optimalité.
* **Leçon 3. Calcul des coûts marginaux.**
  1. **Rappels : cycle de changement et coût marginal de la variable *x*12.**

Reprenons le tableau 0 construit selon la méthode du coin nord-ouest (tableau T5). À la leçon précédente, nous avons indiqué comment construire le cycle de changement associé à la case hors base (1; 3). Nous en avons déduit la valeur du coût marginal de la variable *x*13 associée à cette case.

Nous avons également mentionné lors de la leçon précédente que cette approche devient fastidieuse lorsqu’on doit l’appliquer un grand nombre de fois, et qu’il existe une méthode plus efficace, dite méthode des potentiels. Nous décrivons maintenant cette méthode.

* 1. **La méthode des potentiels.**

Le coût marginal  d’une variable *xij* dans une solution de base s’écrit toujours sous la forme de l’équation (1) maintenant affichée :

 = *cij*  − (*ui* + *vj*) . (1)

Dans la formule (1), *cij* dénote le coût unitaire de la case (*i; j*); *ui* et *vj* sont les valeurs de variables, dites *variables duales*. Nous indiquons maintenant comment calculer ces paramètres *ui* et *vj*.

Rappelons que, dans toute solution de base, le coût marginal d’une variable de base est toujours nul. Pour une telle variable de base, l’équation (1) exige donc que l’écart entre les deux termes de son membre droit soit nul, c’est-à-dire que ces deux termes soient égaux. Ainsi, on peut affirmer que le coût unitaire de toute variable de base *xij* est égal à la somme des paramètres *ui* et *vj* correspondants, ce que nous traduisons par la formule (2) :

pour toute variable de base *xij*, *cij*  = *ui* + *vj* . (2)

Nous nous servirons de la formule (2) pour calculer les valeurs *ui* et *vj* des variables duales. Mais auparavant, rappelons que les solutions de base de notre exemple comportent 7 variables de base. On aura donc 7 conditions de la forme (2). Or, il y a autant de variables duales qu’il y a de rangées dans le tableau de transport, et les tableaux de notre exemple comportent 8 rangées, soit 3 lignes et 5 colonnes. Ainsi, nous cherchons à déterminer 8 paramètres, et ceux-ci sont soumis à 7 conditions de la forme (2). Il y a donc un paramètre en excédent, dont la valeur pourra être fixée «librement». Traditionnellement, le choix du paramètre à fixer a priori se porte sur le premier de la liste, soit *u*1; de plus, la valeur retenue est 0, qui souvent sert de valeur de référence en mathématiques. En résumé, la tradition veut que l’on pose : *u*1 = 0.

* 1. **Calcul des valeurs des variables duales dans le cas du tableau 0 de l’exemple.**

Reprenons le tableau 0 de notre exemple (tableau T5). Et, tel que convenu précédemment, posons: *u*1 = 0. Nous recourrons à la formule (2) pour déterminer les valeurs des autres variables duales. Tout d’abord, *x*11 est variable de base : par conséquent,

*c*11 = *u*1 + *v*1

1 = 0 + *v*1.

Ainsi, la variable *v*1 prend la valeur 1. De même, *x*12 est variable de base et

*c*12 = *u*1 + *v*2

8 = 0 + *v*2.

Conclusion : *v*2 = 8. Appliquons maintenant la formule (2) à la variable de base *x*22:

*c*22 = *u*2 + *v*2

5 = *u*2 + 8

*u*2 = 5 − 8 = -3.

Etc. Le tableau présentement affiché (tableau T14) donne les valeurs des différentes variables duales.

L’ordre dans lequel sont calculées les valeurs des différentes variables duales dépend de la solution de base. De plus, pour une solution de base donnée, l’ordre de traitement des variables duales n’est pas totalement forcé, quoique certaines règles doivent être respectées. Dans le cas du tableau 0 considéré ici, nous pouvions au départ utiliser l’équation (2) soit avec la variable *x*11, soit avec *x*12, mais avec aucune autre. Si, par exemple, nous tentions de démarrer les calculs avec la variable de base *x*35, il faudrait résoudre l’équation «*c*35 = *u*3 + *v*5» ; or, il est impossible au début de résoudre cette équation, puisque deux de ses paramètres, soit *u*3 et *v*5, sont inconnus; il faut attendre que *u*3 soit déterminé pour utiliser *x*35 et s’attaquer à la valeur de *v*5.

* 1. **Calcul des coûts marginaux dans le cas du tableau 0 de l’exemple.**

Une fois connues les valeurs des variables duales, il est facile de calculer les coûts marginaux des variables hors base. Il suffit en effet d’appliquer la formule (1) : par exemple,

* pour la case hors base (1; 3), le coût unitaire est égal à 1; la somme des variables duales est égale à 0 plus 6, soit 6; enfin, le coût marginal est égal à la différence de 1 et de 6, soit -5;
* de même, pour la case (2; 1), le coût unitaire est égal à 5; la somme des variables duales est égale à -3 plus 1, soit -2; enfin, le coût marginal est égal à la différence de 5 et de -2, ou encore à la somme 5 plus 2, soit 7.

Nous calculons de cette façon les coûts marginaux un à un. Voici les résultats (tableau T15). Nous retrouvons ici le tableau utilisé en section 3 de la leçon 2, lorsque nous avons testé l’optimalité de la solution initiale. Nous constatons, tout comme lors de la leçon 2, que la case (1 ; 3) est la case hors base admettant le coût marginal négatif le plus grand en valeur absolue. Et nous concluons que *x*13 sera la variable entrante.

* **Leçon 4. Résolution de l’exemple à l’aide du didacticiel.**
  1. **Démarrage du didacticiel : choix du problème à traiter, dimensions du tableau.**

Une fois le didacticiel lancé, l’écran devrait ressembler à ce qui est présentement affiché (voir le didacticiel…). Les écrans du didacticiel sont divisés en trois parties :

* le haut donne le titre du problème, ainsi que l’étape de l’algorithme où est rendu l’usager ;
* le centre constitue une zone de travail, formée, sauf exceptions, d’un tableau de transport ;
* le ligne du bas donne un message décrivant l’opération que l’usager doit effectuer sur le tableau de la zone centrale.

Le message présentement en bas de l’écran indique de «cliquer sur un problème ou sur l’icône». Il s’agit ici de sélectionner un problème. Le plus souvent, on choisira un des problèmes pré-programmés de la liste affichée. Mais, l’usager ou son professeur peuvent construire des exemples additionnels à l’aide d’un gabarit en format Excel qui est disponible sur le site Internet de l’auteur; l’usager accède à ces problèmes en cliquant sur l’icône.

Convenons de cliquer sur « Sporcau ». L’écran change alors et le didacticiel demande à l’usager quelles sont les dimensions du tableau de transport. Il faut reporter dans les zones appropriées le nombre d’origines – ici, il s’agit des 3 laboratoires – et le nombre de destinations – ici, ce sont les 5 points de distribution. Nous entrons donc les nombres 3 et 5.

Cette étape, qui paraît sans intérêt dans le présent exemple, prendra tout son sens dans les cas où le problème sera non équilibré. Nous reviendrons sur ce sujet dans la leçon 5.

* 1. **Rappels : construction du tableau 0; coûts marginaux et test d’optimalité.**

Le didacticiel demande maintenant à l’usager de choisir entre 3 méthodes pour construire une solution admissible initiale. Convenons de choisir la 1re, soit la méthode du coin nord-ouest. Comme il s’agit de la méthode pré-sélectionnée par défaut par le didacticiel, il suffit de cliquer sur le bouton Ok. Les deux autres méhodes seront présentées lors de la leçon 6.

Le didacticiel affiche alors «Méthode du coin nord-ouest» dans la barre d’information au haut de l’écran. La solution initiale se construira en définissant une à une les 7 variables de base *xij*. Dans chaque cas, l’usager devra :

* choisir la case (*i*; *j*)  associée en cliquant dans la section inférieure de la case;
* et entrer la valeur numérique de la variable.

Comme la méthode du coin nord-ouest amorce la solution dans le coin supérieur gauche, nous cliquons d’abord dans la case (1; 1), puis nous entrons la valeur pertinente de la variable. Tel qu’indiqué dans la leçon 1, nous inscrirons comme valeur de *x*11 la quantité maximale qui peut être expédiée du laboratoire 1 au centre 1, compte tenu de l’offre en L1 et de la demande en C1. Nous reportons donc la valeur 120 dans la case (1; 1), puis, conformément au message affiché au bas de l’écran, nous appuyons sur la touche Retour. Nous sommes alors prêts pour la 2e variable de base : comme la colonne 1 est saturée, nous nous déplaçons d’une case vers la droite, et cliquons dans la case (1; 2), puis nous entrons la valeur 120. Nous répétons ces deux opérations, jusqu’au moment où nous inscrivons la valeur 140 dans le coin inférieur droit du tableau. La solution de base initiale est alors complètement déterminée.

Le didacticiel calcule alors le coût total *z* = 3795 de cette solution initiale. Ensuite, il demande à l’usager de calculer les valeurs des variables duales. Comme précédemment, ces valeurs sont spécifiées une à une, en deux opérations. L’usager devra :

* cliquer dans la zone ombrée appropriée;
* puis, entrer la valeur numérique de la variable duale.

Dans notre exemple, nous pourrions en un premier temps cliquer dans la zone ombrée à côté de «*v*1 =», puis reporter la valeur 1 dans cette zone. Rappelons, en effet, que la valeur de *v*1  est déterminée par l’équation

*c*11 = *u*1 + *v*1,

c’est-à-dire par la condition

1 = 0 + *v*1.

En un 2e temps, nous traiterions la variable *v*2 : il s’agit de cliquer dans la zone ombrée associée, puis d’entrer la valeur 8. Ensuite, ce serait le tour de*u*2. Etc. Voici le résultat, une fois que toutes les variables duales sont calculées (tableau T14).

Tel qu’indiqué lors de la leçon 3, l’ordre de traitement des variables duales n’est pas totalement forcé, quoique certaines règles doivent être respectées. Nous avons mentionné, à titre d’exemple, que nous ne pourrions pas démarrer avec la variable *v*5 : en effet, lorsque nous cliquons à côté de «*v*5 =», nous utilisons implicitement l’équation «*c*35 = *u*3 + *v*5» puisque *x*35 est la seule variable de base de la colonne 5; or, il est impossible au début de résoudre cette équation, car deux de ses paramètres, soit *u*3 et *v*5, sont inconnus; il faut attendre que *u*3 soit déterminé pour s’attaquer à la valeur de *v*5. Si, malgré tout, l’usager choisit de traiter cette variable en premier lieu et clique dans la zone ombrée à côté de «*v*5 =», le didacticiel affiche le message d’erreur «Position invalide». Noter également que le didacticiel a posé a priori que *u*1 prend la valeur 0, conformément à la convention que nous avons mentionnée lors de la leçon 3.

Revenons au tableau obtenu après avoir spécifié les valeurs de toutes les variables duales (tableau T14). Le didacticiel affiche alors «Calcul des coûts marginaux» dans la barre d’information au haut de l’écran. La prochaine étape consiste donc à calculer les coûts marginaux des variables hors base du tableau. À cette fin, nous utiliserons la formule (1).

* Le didacticiel positionne le curseur dans le coin supérieur gauche de la case hors base (1; 3) et affiche le message suivant : «Inscrire le coût marginal et appuyer sur la touche Tab». Pour la case hors base (1; 3), le coût unitaire est égal à 1; la somme des variables duales est égale à 0 plus 6, soit 6; par conséquent, le coût marginal est égal à la différence de 1 et de 6, soit -5. Nous entrons cette valeur -5 et appuyons sur la touche Tab.
* Le didacticiel déplace le curseur dans la case hors base (1; 4) et affiche le même message. Cette fois, le coût marginal est égal à -4, valeur que nous entrons. Puis, nous appuyons sur la touche Tab.
* De même, nous reportons le coût marginal -4 dans la case (1; 5), puis appuyons sur la touche Tab.
* Le curseur est maintenant placé dans la case hors base (2; 1). Le coût unitaire est égal à 5; la somme des variables duales est égale à -3 plus 1, soit -2; enfin, le coût marginal est égal à la différence de 5 et de -2, ou encore à la somme 5 plus 2, soit 7.
* Nous poursuivons ainsi, entrant les coûts marginaux 2 dans la case (2; 5), 1 dans les cases (3 ;1) et (3 ;2), puis enfin -1 dans la case (3 ;3).

Le didacticiel affiche maintenant le message «Le tableau est-il optimal?» Comme plusieurs coûts marginaux du tableau sont négatifs (tableau T15), nous cliquons sur le bouton Non.

* 1. **Itération 1, pivotage.**

Démarre maintenant l’itération numéro 1. Le message au bas de l’écran demande de «Cliquer dans la case de la variable entrante.» Il s’agit ici de déterminer quelle case hors base du tableau admet le coût marginal négatif le plus grand en valeur absolue. Une rapide inspection indique que la valeur recherchée apparaît dans la case (1 ; 3) et est égale à -5. Nous cliquons donc dans cette case (1 ; 3).

Le didacticiel affiche alors, en rouge, un delta dans la case (1 ; 3) où nous venons de cliquer, et demande, dans le message au bas de l’écran, de «Cliquer dans la case de la prochaine variable du cycle de changement.» Rappelons que donner une valeur positive Δ à la variable entrante *x*13 signifie, dans l’état actuel du tableau, que le centre 3 recevrait Δ unités en excédent de sa demande et que le laboratoire 1 expédierait 240+Δ unités alors qu’il n’en dispose que de 240. Évidemment, ceci est impossible! Il faut donc rééquilibrer ces deux rangées, en commençant par l’une ou l’autre. Ici, il est plus facile de s’occuper d’abord de la colonne 3 : en effet, la seule façon de rééquilibrer la colonne 3 est de diminuer de Δ unités la valeur reportée dans la case de base (2;3). Par conséquent, nous cliquons dans cette case (2;3), puis dans (2;2) pour rééquilibrer la ligne 2, puis enfin dans (1;2) pour rééquilibrer la colonne 2. Cette dernière opération permet également de rééquilibrer la ligne 1. Le cycle de changement est maintenant complet (tableau T9).

Le didacticiel demande alors d’«Entrer la valeur Δ…» Rappelons qu’aucune variable ne peut prendre de valeur négative. Or, les termes en −Δ du cycle de changement rendraient négatives les variables *x*23 et *x*12 si Δ devait prendre une valeur élevée. Par conséquent, il faut exiger que

145−Δ ≥ 0 et 120−Δ ≥ 0,

c’est-à-dire que

Δ ≤ min {145 ; 120} = 120.

Nous entrons donc 120 comme valeur de Δ, puis appuyons sur la touche Retour.

Le message au bas de l’écran demande maintenant de «Cliquer dans la case de la variable Sortante.» Il s’agit de la case (1;2) où la variable de base devient nulle lorsque Δ prend la valeur 120 que nous venons de retenir. Noter que c’est dans cette case (1;2) qu’apparaît la plus petite des valeurs associées aux termes en −Δ du cycle. Après notre réponse, le didacticiel efface la valeur de la case sortante, puis passe à l’étape suivante.

Le didacticiel affiche maintenant, en zone centrale, la question : «De combien diminue *z* lors de cette itération?» Rappelons que le coût marginal -5 de la variable entrante *x*13 représente la diminution du coût total *z* résultant du fait d’augmenter de 1 unité la quantité expédiée du laboratoire 1 au centre 3. Poser *x*13 = Δ = 120 entraîne donc une diminution du coût total de 5 × 120 = 600. Par conséquent, nous entrons la valeur 600 dans la zone à droite de la question. Le didacticiel calcule et affiche alors la solution de base résultant de l’itération (tableau T11) : le titre de la barre d’information devient «Tableau 1»; le coût total est révisé de 600 unités à la baisse, passant de 3 795 à 3 195; les variables de base du cycle de changement sont recalculées en remplaçant Δ par sa valeur 120. Enfin, le didacticiel nous amène à l’étape du calcul des valeurs des variables duales.

* 1. **Itération 1, test d’optimalité.**

Il s’agit de calculer les valeurs des variables duales selon un ordre qui dépend de la solution de base traitée.

* Prenant appui sur la valeur a priori de la variable*u*1, nous déterminons d’abord *v*1 et *v*3 :

*c*11 = *u*1 + *v*1 et *c*13 = *u*1 + *v*3

autrement dit :

1 = 0 + *v*1 et 1 = 0 + *v*3.

Nous reportons donc cette valeur 1 dans les zones ombrées à côté de «*v*1 =» et de «*v*3 =».

* Puis, nous utilisons le coût unitaire de la variable de base *x*23 pour calculer *u*2 :

*c*23 = *u*2 + *v*3

3 = *u*2 + 1.

Nous reportons donc cette valeur 2 dans la zone ombrée associée à *u*2.

* Etc.

Voici le tableau, une fois que toutes les variables duales sont calculées (tableau T16).

Il s’agit maintenant de calculer les coûts marginaux des variables hors base. Voici le résultat (tableau T12). À titre d’exemple, indiquons comment obtenir le coût marginal de *x*31 : la somme des variables duales est égale à 1 plus 5, soit 6; par conséquent, le coût marginal recherché est égal à la différence de 2 et de 6, soit -4.

L’itération 1 se termine par le test d’optimalité : comme les coûts marginaux des variables *x*31 et *x*33 sont négatifs, la solution de base associée au tableau 1 n’est pas optimale. Il faut donc continuer.

* 1. **Itération 2, pivotage.**

Nous en sommes maintenant au début de l’itération numéro 2. La variable entrante est *x*31, car c’est elle qui admet le coût marginal négatif le plus grand en valeur absolue. Pour construire le cycle de changement, nous cliquons successivement dans les cases (1;1), (1;3), (2;3), (2;4) et (3;4). La valeur maximale de Δ est 25 et correspond à la case (2;3); par conséquent, la variable sortante est *x*23. Enfin, le coût total *z* diminue de 4 fois 25, soit 100 unités.

Dès que nous entrons cette dernière réponse, le didacticiel affiche le tableau 2 (tableau T17), dont le coût total est de 100 unités moins élevé que celui du tableau précédent.

* 1. **Itération 2, test d’optimalité.**

La solution de base associée à ce tableau 2 est-elle optimale? Pour le savoir, il faudra calculer les coûts marginaux des variables hors base. Et, pour ce calcul, il nous faut les valeurs des variables duales. Le didacticiel nous a d’ailleurs amenés à cette étape, comme le montre le titre «Calcul des valeurs des variables duales» affiché dans la barre d’information. À nouveau, il a posé a priori que *u*1 est égal à 0. Nous déterminons donc les valeurs requises à l’aide de la formule (2). Puis, nous appliquons la formule (1) pour calculer les coûts marginaux des variables hors base. Voici le tableau résultant (tableau T17).

Comme les coûts marginaux des variables *x*14 et *x*15 sont négatifs, la solution de base associée au tableau 2 n’est pas optimale. Une autre itération sera requise. Eh oui! Ce n’est pas encore fini!

* 1. **Itération 3, pivotage.**

Nous en sommes au choix de la variable entrante et le message au bas de l’écran demande de cliquer dans la case correspondante. Cette fois, le coût marginal négatif le plus grand en valeur absolue est atteint en deux cases, soit (1;4) et (1;5). Théoriquement, nous pourrions choisir l’une ou l’autre de ces deux cases; dans les deux cas, la solution de base obtenue admettrait un coût total inférieur à 3 095. Procéder ainsi au hasard présente cependant un inconvénient : le nombre d’itérations risque d’être inutilement élevé. L’expérience montre, en effet, que le nombre d’itéra­tions tend à être moindre quand les cas d’égalité sont tranchés non pas de façon aléatoire, mais sur la base du principe général suivant :

*toutes autres choses étant égales par ailleurs*, ceteris paribus comme disent les avocats férus de latin, *une case dont le coût unitaire est moins élevé a priorité dans la base*.

Ici, les coûts unitaires des deux cases candidates sont 5 pour la case (1;4) et 4 pour la case (1;5). Le principe favorise donc la case (1;5) pour entrer dans la base. Si, malgré tout, nous cliquions dans la case (1;4), le didacticiel émettrait un message d’erreur nuancé : «Case sous-optimale : il est généralement recommandé de choisir, comme variable entrante, l’une des candidates admissibles dont le coût unitaire est minimal.»

Cliquons sur le bouton Ok pour revenir au choix de la variable entrante, puis suivons la recommandation en cliquant dans la case (1;5). Le didacticiel demande alors de construire le cycle de changement. Le voici une fois complété. La valeur maximale permise pour Δ est 95 et est atteinte dans la case (1;1). Ainsi, *x*11 sera la variable sortante. De plus, lors de cette itération, le coût total *z* diminue de 3 fois 95, soit 285, pour s’établir à 2 810 unités.

* 1. **Itération 3, test d’optimalité.**

Dès que la dernière réponse «285» est entrée, le didacticiel affiche le tableau numéro 3 (tableau T18). Il faut alors calculer les valeurs des variables duales, puis les coûts marginaux des variables hors base. Voici le tableau résultant (tableau T18). Cette fois, il n’y a aucun coût marginal négatif : par conséquent, il faut cliquer sur le bouton Oui. La solution de base associée au tableau courant est donc optimale. Décrivons cette solution optimale de façon détaillée, en indiquant explicitement les valeurs des variables hors base :

*x*13 = 145 et *x*15 = 95 et *x*22 = 130 et *x*24 = 30 et *x*31 = 120 et *x*34 = 95 et *x*35 = 45

*x*11 = *x*12 = *x*14 = *x*21 = *x*23 = *x*25 = *x*32 = *x*33 = 0.

Et vérifions que son coût total est bien égal à 2 810 unités :

*z* = (1 × 145) + (4 × 95) + (5 × 130) + … + (8 × 45) = 2 810.

Si nous effectuons les multiplications de cette formule et additionnons les différents produits, nous retrouvons la valeur 2 810 calculée au fil des itérations. Cela ne devrait pas être une surprise! En mathématiques, toutes les formules mènent à la même réponse…

* **Leçon 5. Cas particuliers.**
  1. **Problèmes non équilibrés.**

Le *problème* de transport utilisé dans les leçons 1 à 4 à titre d’exemple est *équilibré*, en ce sens que l’offre totale y est égale à la demande totale. Dans les applications pratiques, il arrive souvent que cette condition ne soit pas satisfaite. Cette remarque semble réduire considéra­blement l’intérêt de l’algorithme du transport qui ne traite que les problèmes équilibrés. Aurions-nous perdu notre temps avec cet algorithme qui se limite à un cas particulier?

Il n’en est rien, car, comme nous le verrons bientôt, tout problème de transport se ramène à un problème équilibré. Reprenons notre exemple de la leçon 1, mais fixons l’offre du laboratoire 1 à 250 unités, au lieu de 240 comme précédemment (tableau T19). Dans cette nouvelle version du problème, l’offre totale s’élève à 670 unités et excède de 10 unités la demande totale. Il s’agit donc d’un *problème non équilibré*.

Nous voulons exprimer ce problème sous une forme équivalente qui soit équilibrée (tableau T20). Nous introduisons donc une destination fictive, C6, dont la demande coïncide avec l’excédent de l’offre totale sur la demande totale. La demande en C6 est donc fixée à 10 unités. Convenons également qu’une valeur positive dans la colonne C6 signifie qu’une partie des unités disponibles au laboratoire correspondant ne sera pas utilisée. Par exemple, poser «*x*16 = 7» revient à recommander que seulement 243 des 250 unités disponibles au laboratoire 1 soient expédiées aux cinq centres. Les 7 autres unités resteraient au laboratoire 1 et serviraient à d’autres fins, ou encore seraient utilisées lors d’une période de planification ultérieure. Elles ne seraient pas déplacées en réalité. Il convient donc d’attribuer un coût unitaire nul à la case (1;6), de même qu’à toutes les autres cases de cette colonne.

Nous indiquons maintenant comment le didacticiel traite cet exemple. Supposons que soit affiché le menu initial Sélection d’un problème. (Ce menu, c’est celui qui apparaît immédiatement après le lancement du programme; on peut également y revenir en toute occasion, ou presque, en cliquant sur le bouton Retour au menu initial placé à la droite de la barre des messages.) Donc, nous sommes devant le menu initial. Nous cliquons sur le problème «Sporcau révisé». Dans l’écran subséquent, le didacticiel demande d’indiquer les dimensions *m* et *n* du tableau de transport. L’usager doit noter que, dans ce problème, l’offre totale excède la demande totale et que, par conséquent, une 6e destination, fictive, doit être ajoutée. Il repor­tera donc les valeurs 3 et 6 respectivement dans les zones associées aux paramètres *m* et *n*, puis il cliquera sur le bouton Ok. Le didacticiel demande alors de choisir une méthode de construction de tableau initial. Après la réponse de l’usager, il affiche un tableau de transport comportant une 6e colonne dont la demande 10 est égale à l’excédent de l’offre totale sur la demande totale et dont les coûts unitaires sont tous nuls.

En résumé : dans le problème Sporcau révisé, parce que l’offre totale excède la demande totale de 10 unités, nous avons ajouté une **colonne fictive** dont la demande est fixée à 10 unités et dont les coûts unitaires sont nuls. De même, lorsque, dans un problème, la demande totale dépasse l’offre totale, nous ajoutons une **ligne** fictive dont l’offre est égale à l’écart entre demande et offre totales et dont les coûts unitaires sont nuls.

* 1. **Solution de base dégénérée.**

Dans une solution de base, toutes les variables hors base sont nulles, et toutes les variables positives sont dans la base. Mais il peut arriver que certaines variables de base soient nulles. On parle alors de *solutions de base dégénérées*.

Nous donnons maintenant un exemple de solution dégénérée. Reprenons le tableau de transport avec une destination fictive associé précédemment au problème non équilibré (tableau T20). Et construisons une solution de base initiale selon la méthode du coin nord-ouest. Nous nous plaçons d’abord dans la case (1; 1) et nous reportons dans cette case le nombre 120, soit la valeur maximale permise par la structure du problème. Ensuite, la colonne 1 étant saturée, nous nous déplaçons à la case adjacente (1 ; 2) située à droite et nous attribuons à cette case les 130 unités du labo­ratoire 1 non encore utilisées (tableau T21). Coïncidence : ces 130 unités épuisent l’offre de la ligne 1 et, en même temps, comblent la demande de la colonne 2.

Nous pourrions être tentés de déclarer saturées ces deux rangées et de sauter immédiatement à la «prochaine» case d’une rangée non saturée, soit la case (2 ; 3). Nous allons voir pourquoi il serait inapproprié de procéder ainsi. Supposons donc que la prochaine attribution se fasse dans la case (2 ; 3) : la demande du centre 3 limiterait à 145 la valeur reportée dans cette case; puis, on inscrirait 15 dans la case la case (2 ; 4); etc. On obtiendrait finalement la solution admissible suivante (tableau T22). Malheureusement, il ne s’agit pas d’une solution de base : en effet, ce tableau ne comporte que 7 valeurs explicites, alors qu’une solution de base doit avoir

*m + n* − 1 = 3 + 6 − 1 = 8

variables de base. Lorsqu’un tableau comporte ainsi insuffisamment de variables de base, il n’est pas possible de construire les cycles de changements de toutes les cases hors base, ni de calculer les coûts marginaux de toutes les variables hors base. Dans le tableau considéré ici, il serait, par exemple, impossible de construire le cycle de la case (1 ; 4) : si nous reportons Δ dans cette case, nous devrons, pour rééquilibrer la ligne 1, inscrire un terme −Δ soit dans la case (1 ; 1), soit dans la case (1 ; 2); mais, dans les deux cas, nous sommes dans un cul-de-sac, car il n’y a pas de variables de base dans ces colonnes ailleurs que dans la ligne 1…

Revenons donc sur nos pas (voir tableau T21) et reprenons immédiatement après l’attribution de la valeur 130 à la case (1 ; 2). Comme nous l’avons mentionné précédemment, ces 130 unités épuisent l’offre de la ligne 1 et, en même temps, comblent la demande de la colonne 2. Mais, nous ne dirons pas que ces deux rangées sont saturées. Nous considérerons plutôt qu’une seule l’est et que l’autre voit son offre ou sa demande résiduelle devenir nulle. Laquelle sera dite saturée? Dans le but d’éclairer notre choix, analysons l’impact de cette décision :

* Si la colonne 2 est déclarée saturée, nous nous déplacerons de la case (1 ; 2) à la case (1 ; 3) immédiatement à droite et la prochaine attribution se fera en (1 ; 3) .
* Si, par contre, c’est la ligne 1 qui est déclarée saturée, la prochaine attribution se fera dans la case (2 ; 2) située immédiatement en dessous de la case (1 ; 2).

Choisir entre la colonne 2 et la ligne 1 revient donc à choisir entre les cases (1 ; 3) et (2 ; 2) pour la prochaine attribution. Théoriquement, nous pourrions choisir l’une ou l’autre de ces cases; dans les deux cas, la méthode se termine avec une solution de base admissible. Mais, procéder au hasard présente l’inconvénient dont nous avons parlé précédemment : l’expérience montre, en effet, que le nombre d’itéra­tions tend à être moindre quand les cas d’égalité sont tranchés non pas de façon aléatoire, mais sur la base du principe général suivant :

*toutes autres choses étant égales par ailleurs, une case dont le coût unitaire est moins élevé a priorité dans la base*.

Ici, le coût unitaire de la case (1 ; 3) est inférieur à celui de (2 ; 2) : par conséquent, à choisir entre (1 ; 3) et (2 ; 2) comme case de base où faire la prochaine attribution, nous retiendrons la première. Nous déclarons donc que la colonne 2 est saturée, que l’offre résiduelle de la ligne 1 est nulle et ferons la prochaine attribution dans la case (1 ; 3). Mais, auparavant, comment réagirait le didacticiel si nous cliquions dans la case (2 ; 2) malgré tout? Eh bien, il afficherait un message d’erreur nuancé : «Case sous-optimale : dans un tel cas de dégénérescence où l’offre d’une ligne et la demande d’une colonne deviennent nulles en même temps, il est recommandé généralement de choisir la case de meilleur coût unitaire».

Cliquons donc sur le bouton Ok pour indiquer que nous avons pris connaissance du message, puis dans la case (1 ; 3) conformément à la décision annoncée ci-dessus. Nous y reportons la valeur 0, qui est le nombre d’unités encore disponibles au laboratoire 1 après les deux premières attributions. Nous poursuivons la construction de la solution initiale par l’attribution de 145 unités dans la case (2 ; 3), puis 15 unités en (2 ; 4), etc. Le tableau maintenant affiché donne la solution de base obtenue (tableau T22). Elle comporte 8 variables de base, tel qu’exigé par la formule.

Une solution de base dans laquelle une ou plusieurs variables de base prennent la valeur 0 est dite dégénérée. La dégénérescence nous force à prendre diverses précautions dans la description de l’algorithme du transport. Par exemple, il serait inexact d’affirmer que chaque itération entraîne une *diminution* de la valeur de *z* : en effet, lorsqu’un terme « 0−Δ » apparaît dans le cycle de changement de la case entrante, la valeur maximale de Δ est 0 et le coût total *z* reste inchangé lors du passage à la solution de base résultante.

* 1. **Modèles avec solutions optimales multiples.**

Dans les applications pratiques, il est souvent utile de savoir si la solution de base optimale fournie par un logiciel est l’unique solution optimale du problème traité, ou si plutôt il en existe d’autres. Comme dans le cas de l’algorithme du simplexe, on conclut à l’unicité de la solution optimale lorsque les coûts marginaux de toutes les variables hors base du tableau sont différents de 0.

À titre d’exemple, considérons le tableau 3 obtenu à la fin de la leçon 4 (tableau T18). Il s’agit bien d’un tableau optimal, car aucun coût marginal n’est négatif. Mais, observons que les coûts marginaux des variables hors base *x*14 et *x*33 sont nuls; et convenons de traiter l’une d’entre elles, disons *x*14, comme variable entrante (tableau T24). Son cycle de changement est formé des cases (1 ; 4), (1 ; 5), (3 ; 5) et (3 ; 4). Si nous donnons à *x*14 une valeur Δ ne dépassant pas 95, nous obtenons une nouvelle solution optimale : en effet, le coût total ne change pas, car la diminution découlant de ce pivotage est égale au produit du coût marginal 0 et de la valeur Δ de la variable entrante; évidemment, ce produit est nul…

Noter qu’il ne suffit pas de détecter un coût marginal nul dans un tableau optimal pour conclure à la non-unicité des solutions optimales. Considérons, en effet, le tableau optimal suivant, obtenu du tableau 3 en modifiant quelques données (tableau T25). Les variables hors base *x*12 et *x*14 admettent un coût marginal nul et pourraient donc être traitées comme variables entrantes pour tenter de construire d’autres solutions optimales. Dans les deux cas, le cycle de changement comporte un terme « 0−Δ » dans la case (3 ; 4) : par conséquent, la valeur maximale que peut prendre la variable entrante est 0, et la solution de base résultant du pivotage admet exactement les mêmes valeurs que la solution de base associée au tableau. (Les deux solutions de base diffèrent seulement dans la liste de leurs variables de base : dans celle qui est affichée, *x*34 est variable de base et *x*14 est hors base; dans l’autre, c’est l’inverse. Mais, dans les deux cas, et *x*14 et *x*34 sont nulles.)

Dans cet exemple, on vérifie que la solution affichée est l’unique solution optimale du problème : il suffit, pour s’en convaincre, d’effectuer trois itérations en prenant comme variables entrantes successivement *x*12, *x*14 et *x*34: on revient alors à notre point de départ, après avoir visité deux autres solutions de base qui diffèrent de la solution affichée seulement par la case occupée par la variable de base nulle.

En général, dans un *tableau optimal* associé à un problème de transport :

* Si les coûts marginaux des variables hors base du tableau sont tous différents de 0, la solution de base associée au tableau est l’unique solution optimale du problème.
* Si une variable hors base *xij* admet un coût marginal nul et si cette variable, lorsque considérée comme variable entrante, peut prendre une valeur positive, alors le problème possède plusieurs solutions optimales.
* Enfin, si certaines variables hors base admettent un coût marginal nul et si toutes ces variables sont limitées à la valeur 0 lorsque considérées comme variables entrantes, alors on ne peut conclure ni à l’unicité, ni à la multiplicité des solutions optimales à partir du tableau considéré. Pour déterminer si le problème possède une seule ou plusieurs solutions optimales, il faudra effectuer une ou plusieurs itérations en prenant comme variables entrantes des variables hors base de coût marginal nul.
* **Leçon 6. Autres heuristiques pous la construction d’une solution initiale.**

**6.1 La méthode des coûts minimaux**.

L’algorithme du transport construit itérativement une suite de solutions de base, chacune de coût total inférieur à celui de la solution précédente ou en tout cas ne la dépassant pas. L’algorithme se termine quand il s’avère impossible d’améliorer la solution de base courante. Le critère d’arrêt est l’absence de coût marginal négatif dans les cases hors base du tableau courant.

Cette approche présuppose l’existence d’une solution initiale. Nous avons décrit en leçon 1 une méthode, dite méthode du coin nord-ouest, pour construire une telle solution initiale. Selon cette méthode, nous effectuons une 1re attribution dans le coin supérieur gauche du tableau, puis nous nous déplaçons vers une case adjacente pour y reporter la plus grande valeur permise par la structure du problème, et continuons ainsi jusqu’au moment où une dernière attribution dans le coin inférieur droit complète la solution recherchée.

Dans la solution ainsi construite, les cases de base tendent à s’agglutiner autour de la diagonale joignant les coins supérieur gauche et inférieur droit, et ce indépendamment des coûts unitaires apparaissant dans les différentes cases. Dans certains cas où un grand nombre de valeurs élevées se retrouvent sur ou près de la diagonale, la solution de base découlant de la méthode du coin nord-ouest est très éloignée de l’optimum et un grand nombre d’itérations est requis pour atteindre un optimum.

Il est possible de réduire le nombre attendu d’itérations en tenant compte des coûts unitaires lors de la sélection des cases de base. Une heuristique, dite *méthode des coûts minimaux*, recommande de choisir systématiquement l’une des cases parmi celles encore disponibles qui présentent le plus petit coût unitaire.

Voyons cette méthode à l’œuvre sur l’exemple Sporcau considéré dans les leçons 1 à 4. Rappelons-en le contexte (tableaux T1 et T2). Une entreprise veut expédier un total de 660 unités de 3 laboratoires vers 5 centres de distribution. La méthode des coûts minimaux recommande d’amorcer la solution dans une case de coût unitaire minimal. Ici, deux candidates sont à égalité selon ce critère : ce sont les cases (1;1) et (1;3). Pour les départager, nous notons que nous reporterions la valeur 120 dans la case (1;1) et 145 dans l’autre; prenant pour acquis que nous avons intérêt à reporter les plus grandes valeurs possibles dans les cases de coût unitaire faible, nous choisissons de faire une 1re attribution de 145 dans la case (1;3). Après cette 1re décision (tableau T26), nous révisons à la baisse l’offre du laboratoire 1 et la demande du centre 3. Cette dernière est maintenant comblée : nous dirons que la *colonne* 3 est *saturée* et reporterons des astérisques dans les cases (2;3) et (3;3), de façon à indiquer qu’elles ne sont plus disponibles pour une future attribution.

La case disponible de coût unitaire minimal est maintenant la case (1;1). Le laboratoire 1 dispose de 95 unités et la demande du centre 1 est de 120 unités : nous reportons donc en (1;1) la valeur 95 et révisons l’offre du laboratoire 1 de même que la demande du centre 1. La *ligne* 1 devient alors *saturée*, en ce sens que toutes les unités initialement disponibles sont déjà attribuées. Nous inscrivons des astérisques dans les cases inutilisées de cette rangée, de façon à indiquer qu’elles ne sont plus disponibles pour une future attribution.

La prochaine itération consiste à reporter la valeur 25 dans la case (3;1), à réviser l’offre en L3 et la demande en C1, à déclarer saturée la colonne 1, puis enfin à inscrire un astérisque en (2;1).

La case inutilisée de coût unitaire minimal est maintenant (2;3). Mais, cette case n’est pas disponible comme l’indique l’astérisque reportée dans sa section inférieure (tableau T27); en fait, la demande au centre 3 a été comblée dès la 1re attribution et il n’est pas question d’acheminer des unités additionnelles à ce centre. La prochaine attribution se fera dans la case qui est à la fois disponible et de coût unitaire minimal. Il s’agit de (2;2), où nous incrivons la valeur 130, obtenue ici comme le minimum de l’offre résiduelle 160 de la ligne 2 et de la demande résiduelle 130 de la colonne 2.

Les attributions subséquentes se feront selon le même principe, soit de rechercher la case disponible de coût unitaire minimal et d’y reporter comme valeur le minimum de l’offre résiduelle et de la demande résiduelle associées à cette case. Voici le tableau résultant de la méthode des coûts minimaux dans le cas de notre exemple (tableau T28).

Dans la plupart des cas, la solution initiale construite selon la méthode des coûts minimaux est de coût total inférieur à celle construite selon la méthode du coin nord-ouest et exigera moins d’itérations pour l’obtention d’une solution optimale. Il en est ainsi pour le problème Sporcau utilisé ici à titre d’exemple. Lors de la leçon 1, l’application de la méthode du coin nord-ouest à ce problème a résulté en un tableau, que nous avons alors numéroté 0; en leçon 4, prenant ce tableau 0 comme point de départ, nous avons construit itérativement des tableaux 1, 2 et 3, ce dernier s’avérant optimal. La méthode des coûts minimaux, lorsqu’elle est appliquée à ce même problème Sporcau, nous amène directement au tableau 2 de cette séquence; une seule itération sera donc requise pour obtenir une solution optimale, au lieu de 3. La méthode des coûts minimaux est légèrement plus complexe que la méthode du coin nord-ouest et exige un peu plus de calculs; mais la qualité de la solution initiale, qui souvent permet de diminuer le nombre d’itérations, compense amplement cet effort additionnel.

**6.2 La méthode des pénalités.**

La méthode du coin nord-ouest est en quelque sorte aveugle : elle ne tient aucun compte des coûts unitaires. La méthode des coûts minimaux, plus subtile, donne priorité aux cases disponibles de coût unitaire minimal. Mais elle est myope, en ce sens qu’elle ne prend pas en considération les conséquences à moyen et à long termes de la prochaine attribution. Il arrive fréquemment que cette méthode nous oblige, en fin de parcours, à retenir des cases excessivement coûteuses. Dans l’exemple Sporcau, la dernière attribution se fait dans la case (3;4), qui est la seule disponible à ce moment-là. Si le coût unitaire de cette case était fixé à 1000, nous serions encore obligés de poser *x*34 = 95 et d’encourir ainsi un coût de 95 000…

La méthode des pénalités cherche à éviter que nous nous retrouvions en fin de parcours contraints à des choix catastrophiques. Reprenons le problème de Sporcau pour illustrer cette heuristique. Nous chercherons à utiliser dans une rangée donnée la meilleure case, soit celle dont le coût unitaire est le moins élevé. Ce ne sera pas toujours possible, si nous exigeons que la solution soit admissible ; quand la meilleure case ne sera pas disponible, nous nous rabattrons sur la 2e meilleure, à moins que celle-ci également ne soit pas disponible. Considérons, à titre d’exemple, la colonne 5 (tableau T29). La meilleure case est (1;5), dont le coût unitaire est égal à 4. Si cette case devient non disponible et qu’une attribution doit être faite dans cette rangée, il faudra se rabattre sur les cases (2;5) ou (3;5) : on devra donc encourir pour cette décision un coût unitaire de 7 ou de 8, nettement plus élevé que le coût minimal 4 de la rangée. Le surcoût minimal, ici l’écart entre 4 et 7, sera appelé pénalité. De façon générale, la *pénalité* associée à une rangée est définie comme la différence, en valeur absolue, entre les deux coûts unitaires minimaux des cases disponibles apparaissant dans cette rangée.

La *méthode des pénalités* construit une solution initiale en cherchant, à chaque étape, à minimiser les pénalités. Plus précisément, cette heuristique procède itérativement à des attributions, sélectionnant la case où effectuer la prochaine attribution selon la règle hiérarchique suivante : on retient parmi les cases disponibles

* d’abord, celles dont la rangée est associée à la pénalité la plus élevée;
* puis, celles de coût unitaire minimal;
* et enfin, celles auxquelles on peut attribuer la valeur maximale.

S’il reste plus d’une case candidate, le choix se fait alors de façon aléatoire parmi les candidates encore en lice.

Voyons cette méthode à l’œuvre sur l’exemple Sporcau considéré dans les leçons 1 à 4. Il faut d’abord calculer les pénalités (tableau T29). Par exemple, la pénalité de la colonne 5 est, comme nous l’avons mentionné précédemment, la différence entre les deux meilleurs coûts 7 et 4 de la colonne; de même, la pénalité de la ligne 1 est nulle, car les deux meilleurs coûts de la ligne sont tous deux égaux à 1. Pour la 1re attribution, la règle hiérarchique ci-dessus retient en un premier temps la ligne 3, ainsi que les colonnes 2 et 5; dans ces trois rangées, l’unique case de coût minimal est (3;1), dont le coût unitaire est 2. Nous reportons donc la valeur 120 dans la case (3;1). Cette attribution comble la demande du centre 1 : ainsi, la colonne 1 est saturée et, pour noter la non-disponibilité des cases de cette colonne, nous inscrivons des astérisques dans les cases (1; 1) et (1; 2) (tableau T30).

Il faut maintenant recalculer les pénalités (tableau T30). Les deux meilleures cases de la ligne 1 sont maintenant (1;3) et (1;5); la différence entre leurs coûts est 4−1=3. Noter qu’après une attribution qui sature une colonne, les pénalités des autres colonnes restent inchangées. Cette fois, la règle hiérarchique retient d’abord les lignes 1 et 3, ainsi que les colonnes 2 et 5, puis sélectionne (1;3), qui est l’unique case disponible de coût minimal. Nous reportons la valeur 145 dans cette case. Nous continuons ainsi, jusqu’à l’obtention de la solution initiale suivante (tableau T31).

Noter que ce tableau coïncide avec le tableau 3, dont nous avons vérifié l’optimalité en leçon 4. C’est un hasard que nous obtenions ainsi une solution initiale qui soit optimale. Le plus souvent, un certain nombre d’itérations sera requis pour atteindre un optimum. Cependant, on peut affirmer que la méthode des pénalités donne des solutions initiales qui, en moyenne, s’écartent moins de l’optimum que celles résultant des deux autres heuristiques décrites précédemment.

**Tutoriel - Algorithme du transport - Tableaux**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T1. L’offre et la demande | | | | | | |
| Laboratoire L*i* | L1 | | L2 | L3 | | Total |
| Offre S*i* | 240 | | 160 | 260 | | 660 |
| Centre C*j* | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |  |
| Demande D*j* | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T2. Coûts unitaires de transport | | | | | |
|  | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
| L1 | 1 | 8 | 1 | 5 | 4 |
| L2 | 5 | 5 | 3 | 6 | 7 |
| L3 | 2 | 9 | 5 | 9 | 8 |

Exemple tiré de *Méthodes d'optimisation pour la gestion*; par Y. Nobert, R. Ouellet et R. Parent; 2008, Gaëtan Morin, éditeur; p. 292-294.

Voir aussi *La recherche opérationnelle, 3e édition*; par Y. Nobert, R. Ouellet et R. Parent; 2001, Gaëtan Morin, éditeur; page 358.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T3. Tableau de transport | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
|  | |  | | |  | |  | |  | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | |  | | |  | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | |  | |  | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |
| --- |
| **T4. La méthode du coin nord-ouest** |
| 1. Amorcer la méthode avec la case située dans le coin supérieur gauche du tableau de transport. 2. Attribuer le plus d'unités possible à la case courante. 3. Aller à une case adjacente à la case courante, en se déplaçant soit vers la droite, soit vers le bas. Revenir à l'étape 2.   La méthode s'arrête une fois effectuée l'attribution à la case située dans le coin inférieur droit. |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T5. Solution de base admissible initiale : tableau 0 | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
| **120** | | **120** | | |  | |  | |  | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | **10** | | | **145** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |
| --- |
| **T6. Solution de base associée au tableau 0** |
| *x*11 = 120 et *x*12 = 120 et *x*22 = 10 et *x*23 = 145 et *x*24 = 5 et *x*34 = 120 et *x*35 = 140  *x*13 = *x*14 = *x*15 = *x*21 = *x*25 = *x*31 = *x*32 = *x*33 = 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T7. Cycle de changement associé à la case hors base (1 ; 3) | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
| **120** | | **120−Δ** | | | **Δ** | |  | |  | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | **10+Δ** | | | **145−Δ** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T8. Tableau 0 : coûts marginaux | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 | -5 | 1 | -4 | 5 | -4 | 4 |  |
| **120** | | **120** | | |  | |  | |  | | 240 |
| L2 | 7 | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | **10** | | | **145** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 | 1 | 2 | 1 | 9 | | -1 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T9. Tableau 0 et cycle de changement de la variable entrante | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 | -5 | 1 | -4 | 5 | -4 | 4 |  |
| **120** | | **120−Δ** | | | **Δ** | |  | |  | | 240 |
| L2 | 7 | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | **10+Δ** | | | **145−Δ** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 | 1 | 2 | 1 | 9 | | -1 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |
| T10. Cycle de changement associé à la case hors base (1 ; 5) | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
| **120** | | **120−Δ** | | |  | |  | | **Δ** | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | **10+Δ** | | | **145** | | **5−Δ** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120+Δ** | | **140−Δ** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T11. Solution de base résultante : tableau 1 | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
| **120** | |  | | | **120** | |  | |  | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | **130** | | | **25** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T12. Tableau 1 et coûts marginaux | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 | 5 | | 8 |  | 1 | 1 | 5 | 1 | 4 |  |
| **120** | |  | | | **120** | |  | |  | | 240 |
| L2 | 2 | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | **130** | | | **25** | | **5** | |  | | 160 |
| L3 | -4 | 2 | 1 | 9 | | -1 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | |  | | **120** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |
| --- |
| **T13. Test d’optimalité** |
| * Si les coûts marginaux des cases hors base sont tous ≥ 0, il n’est pas possible de diminuer la valeur du coût total *z* et la solution de base courante est optimale. * Si une ou plusieurs cases hors base admettent un coût marginal négatif, on construit une nouvelle solution de base en choisissant une des cases hors base dont le coût marginal est négatif et en la forçant à devenir case de base. Cette case dont le statut est modifié est dite *case entrante*. |

**T14. Calcul des valeurs des variables duales dans le tableau 0**

|  | *v*1 = 1 | | *v*2 = 8 | | *v*3 = 6 | | *v*4 = 9 | | *v*5 = 8 | | S*i* |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *u*1 = 0 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 | 240 |
|  | **120** | | **120** | |  | |  | |  | |
| *u*2 = -3 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 | 160 |
|  |  | | **10** | | **145** | | **5** | |  | |
| *u*3 = 0 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 | 260 |
|  |  | |  | |  | | **120** | | **140** | |
| D*j* | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

**T15. Calcul des coûts marginaux dans le tableau 0**

|  | *v*1 = 1 | | *v*2 = 8 | | *v*3 = 6 | | *v*4 = 9 | | *v*5 = 8 | | S*i* |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *u*1 = 0 |  | 1 |  | 8 | -5 | 1 | -4 | 5 | -4 | 4 | 240 |
|  | **120** | | **120** | |  | |  | |  | |
| *u*2 = -3 | 7 | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 | 2 | 7 | 160 |
|  |  | | **10** | | **145** | | **5** | |  | |
| *u*3 = 0 | 1 | 2 | 1 | 9 | -1 | 5 |  | 9 |  | 8 | 260 |
|  |  | |  | |  | | **120** | | **140** | |
| D*j* | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

**T16. Calcul des valeurs des variables duales dans le tableau 1**

|  | *v*1 = 1 | | *v*2 = 3 | | *v*3 = 1 | | *v*4 = 4 | | *v*5 = 3 | | S*i* |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *u*1 = 0 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 | 240 |
|  | **120** | |  | | **120** | |  | |  | |
| *u*2 = 2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 | 160 |
|  |  | | **130** | | **25** | | **5** | |  | |
| *u*3 = 5 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 | 260 |
|  |  | |  | |  | | **120** | | **140** | |
| D*j* | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T17. Tableau 2 | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | | 1 | 1 | 8 |  | 1 | -3 | 5 | -3 | 4 |  |
| **95** | | |  | | **145** | |  | |  | | 240 |
| L2 | 6 | 5 | |  | 5 | 4 | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | | **130** | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 | | 1 | 9 | 3 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
| **25** | | |  | |  | | **95** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T18. Tableau 3 | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 | 3 | | 1 | 4 | 8 |  | 1 | 0 | 5 |  | 4 |  |
|  | | |  | | **145** | |  | | **95** | | 240 |
| L2 | 6 | 5 | |  | 5 | 1 | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | | **130** | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 | | 1 | 9 | 0 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
| **120** | | |  | |  | | **95** | | **45** | | 260 |
| Demande | 120 | | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T19. Un problème non équilibré. L’offre et la demande | | | | | | |
| Laboratoire L*i* | L1 | | L2 | L3 | | Total |
| Offre S*i* | 250 | | 160 | 260 | | 670 |
| Centre C*j* | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |  |
| Demande D*j* | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T20. Problème non équilibré - Tableau de transport | | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | | C6 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | |  | |  | |  | | 250 |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | |  | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | |  | |  | |  | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 10 | | 670 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T21. Problème non équilibré : début de la méthode du coin nord-ouest | | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | | C6 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 0 |  |
| **120** | | **130** | |  | |  | |  | |  | | 250 |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | |  | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | |  | |  | |  | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 10 | | 670 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T22. Problème non équilibré : une solution qui n’est pas une solution de base | | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | | C6 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 0 |  |
| **120 − Δ** | | **130** | |  | | **Δ** | |  | |  | | 250 |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 0 |  |
|  | |  | | **145** | | **15** | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | | **110** | | **140** | | **10** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 10 | | 670 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T23. Problème non équilibré : une solution de base dégénérée | | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | | C6 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 0 |  |
| **120** | | **130** | | **0** | |  | |  | |  | | 250 |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 0 |  |
|  | |  | | **145** | | **15** | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  | 0 |  |
|  | |  | |  | | **110** | | **140** | | **10** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 10 | | 670 |

Nombre de variables de base = *m + n* − 1 = 3 + 6 − 1 = 8

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T24. Tableau 3 et cycle de changement de la case (1 ;4) | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 | 3 | 1 | 4 | | 8 |  | 1 | 0 | 5 |  | 4 |  |
|  | |  | | | **145** | | **Δ** | | **95 − Δ** | | 240 |
| L2 | 6 | 5 |  | 5 | | 1 | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | **130** | | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 | 1 | 9 | | 0 | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
| **120** | |  | | |  | | **95 − Δ** | | **45 + Δ** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T25. Tableau optimal dégénéré | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 | 3 | 1 | 0 | | 4 |  | 1 | 0 | 5 |  | 4 |  |
|  | |  | | | **145** | | **Δ** | | **95 − Δ** | | 240 |
| L2 | 6 | 5 |  | 5 | | 1 | 3 |  | 6 | 2 | 7 |  |
|  | | **130** | | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 | 1 | 9 | | 1 | 6 |  | 9 |  | 8 |  |
| **120** | |  | | |  | | **0 − Δ** | | **45 + Δ** | | 165 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 30 | | 140 | | 565 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T26. Méthode des coûts minimaux – 1re attribution | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 | 95  ~~240~~ |
|  | |  | | | **145** | |  | |  | |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | |  | | | **\*** | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
|  | |  | | | \* | |  | |  | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | ~~145~~ 0 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T27. Méthode des coûts minimaux – 3e attribution | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 | 0  ~~95~~  ~~240~~ |
| **95** | | **\*** | | | **145** | | **\*** | | **\*** | |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
| \* | |  | | | **\*** | |  | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 | 235  ~~260~~ |
| **25** | |  | | | \* | |  | |  | |
| Demande | ~~120~~ ~~25~~ 0 | | 130 | | | ~~145~~ 0 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T28. Méthode des coûts minimaux – Solution de base résultante | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
| **95** | | |  | | **145** | |  | |  | | 240 |
| L2 |  | 5 | |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | | **130** | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 | |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
| **25** | | |  | |  | | **95** | | **140** | | 260 |
| Demande | 120 | | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T29. Méthode des pénalités – Avant la 1re attribution | | | | | | | | | | |  |  |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | Offre |  |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 0 |
|  | |  | |  | |  | |  | | 240 |  |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 2 |
|  | |  | |  | |  | |  | | 160 |  |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  | 3 |
|  | |  | |  | |  | |  | | 260 |  |
| Demande | 120 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |  |
|  | 1 | | 3 | | 2 | | 1 | | 3 | |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T30. Méthode des pénalités – 1re attribution | | | | | | | | | | |  |  |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | Offre |  |
| C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  | 3 |
| \* | |  | |  | |  | |  | | 240 |  |
| L2 |  | 5 |  | 5 |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  | 2 |
| \* | |  | |  | |  | |  | | 160 |  |
| L3 |  | 2 |  | 9 |  | 5 |  | 9 |  | 8 | 140 | 3 |
| **120** | |  | |  | |  | |  | | ~~260~~ |  |
| Demande | ~~120~~ 0 | | 130 | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |  |
|  | \* | | 3 | | 2 | | 1 | | 3 | |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T31. Méthode des pénalités – Solution de base résultante | | | | | | | | | | | | |
| Origine | Destination | | | | | | | | | | | Offre |
| C1 | | C2 | | | C3 | | C4 | | C5 | |
| L1 |  | 1 |  | | 8 |  | 1 |  | 5 |  | 4 |  |
|  | |  | | | **145** | |  | | **95** | | 240 |
| L2 |  | 5 |  | 5 | |  | 3 |  | 6 |  | 7 |  |
|  | | **130** | | |  | | **30** | |  | | 160 |
| L3 |  | 2 |  | 9 | |  | 5 |  | 9 |  | 8 |  |
| **120** | |  | | |  | | **95** | | **45** | | 260 |
| Demande | 120 | | 130 | | | 145 | | 125 | | 140 | | 660 |