Chapitre 2 – Solutions des problèmes

1. L'usine Joubec de Trois-Rivières.

On associe une variable de décision entière à chacun des trois jouets :

$$x_J = \text{nombre de jouets du type } J \text{ fabriqués le mois prochain,}$$

où J = T (tricycles), C (camions) et P (poupées). L'atteinte du point mort constitue une contrainte pour le directeur de l'usine, même si lui en parle comme d'un «objectif». Dans le langage du modèle quantitatif, son objectif est de minimiser les coûts de production, lesquels s'expriment par la fonction z, où

$$z = 15\,x_T + 5\,x_C + 4\,x_P.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories. Il faut d'abord que le point mort soit atteint.

Point mort $\quad 4\,x_T + 1{,}5\,x_C + x_P \ \geq\ 41\,000.$

Il faut également tenir compte des contraintes du carnet de commandes.

Tricycles $\quad x_T \ \geq\ 1\,300$

Camions $\quad x_C \ \geq\ 1\,250$

Poupées $\quad x_C \ \geq\ 4\,000.$

Le tableau suivant décrit l'unique solution optimale. Les coûts de production associés à ce plan s'élèvent à 141 500 $.

Type de jouets	**T**	**C**	**P**
Valeur à l'optimum	1 300	21 200	4 000

2. La tourbière de Rivière-du-Loup.

On associe une variable de décision entière à chacun des trois produits :

$$x_j = \text{nombre d'unités du produit numéro } j \text{ fabriquées durant la saison,}$$

où j = 1 (sachets de Qualité 1), 2 (sacs de Qualité 2) et 3 (ballots de Qualité 3). L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit z, où

$$z = 2\,x_1 + 12\,x_2 + 9\,x_3.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories. Il faut d'abord que, pour chaque ressource, la quantité utilisée n'excède pas la quantité disponible.

Extraction $5\,x_1 + 20\,x_2 + 25\,x_3 \leq 450\,000$

Entrepôt $0{,}2\,x_1 + 0{,}75\,x_2 + 1\,x_3 \leq 20\,000$

Défibrage $3\,x_1 + 8\,x_2 + 5\,x_3 \leq 120\,000.$

Il faut enfin respecter le maximum imposé par le service du marketing et les minima découlant des commandes du grossiste.

Max Q3 $x_3 \leq 15\,000$

Min Q3 $x_3 \geq 10\,000$

Min Q2 $x_2 \geq 3\,000.$

L'unique solution optimale recommande de fabriquer 7 500 sacs de Qualité 2 et 12 000 ballots de Qualité 3; aucun sachet de Qualité 1 ne serait produit. Le profit associé à ce plan de production s'élève à 198 000 $.

3. Un micro-atelier.

On associe une variable de décision entière à chacun des deux types de pièces :

x_J = nombre de pièces du type J fabriquées durant un quart de 8 heures,

où J = A, B. L'objectif de la direction de l'atelier est de maximiser le revenu z tiré de la production des pièces, où

$$z = 5\,x_A + 7\,x_B.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories. Il faut d'abord que, pour chaque machine-outil, le temps utilisé n'excède pas la durée du quart de travail, soit 8 × 60 = 480 minutes.

Machine 1 $3\,x_A + 6\,x_B \leq 480$

Machine 2 $4\,x_A + 4\,x_B \leq 480.$

Il faut enfin limiter l'écart entre les durées de travail des deux opérateurs d'une même paire à un maximum de 20 minutes. Cet écart est égal à

$$|\,(3\,x_A + 6\,x_B) - (4\,x_A + 4\,x_B)\,| = |\,-x_A + 2\,x_B\,|.$$

Pour s'assurer que $|\,-x_A + 2\,x_B\,| \leq 20$, il suffit d'exiger que $-x_A + 2\,x_B$ soit entre –20 et +20. Les deux inéquations suivantes traduisent cette dernière exigence de façon linéaire.

$$-\,x_A + 2\,x_B \leq 20$$

$$x_A - 2\,x_B \leq 20.$$

L'unique solution optimale recommande de fabriquer 80 pièces A et 40 pièces B par quart de travail. Le revenu associé à ce plan de production s'élève à 680 $.

4. Les cidres.

Le modèle contient deux groupes de variables de décision définies ainsi :

x_J = nombre de bouteilles de cidre J produites annuellement

y_J = montant (en $) investi annuellement pour le cidre J,

où J = S (Sukoe), P (Polisukoe). L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit net z, où

$$z \; = \; 5\, x_S + 7{,}25\, x_P - y_S - y_P.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories. Il faut d'abord respecter l'équilibre entre les deux produits :

$$x_S \geq \; 0{,}25\, (x_S + x_P) \quad \text{et} \quad x_S \leq \; 0{,}75\, (x_S + x_P)$$

ce qui se réécrit :

$$0{,}75\, x_S - 0{,}25\, x_P \; \geq \; 0 \quad \text{et} \quad 0{,}25\, x_S - 0{,}75\, x_P \; \leq \; 0.$$

Il faut également que la production n'excède pas la demande.

$$x_S \leq 20\,000 + y_S \quad \text{et} \quad x_P \leq 15\,000 + y_P.$$

Enfin, le total des coûts de production, de distribution et de publicité des cidres ne doit pas dépasser le budget de 295 000 $.

$$5\, x_S + 4\, x_P + y_S + y_P \leq \; 295\,000.$$

Les quatre variables sont soumises à la contrainte usuelle de non-négativité, tandis que seules x_S et x_P doivent *a priori* être entières.

L'unique solution optimale recommande d'une part d'investir 31 500 $ pour le Polisukoe, d'autre part de fabriquer 15 500 bouteilles de Sukoe et 46 5000 bouteilles de Polisukoe. Le profit net associé à cette solution est de 383 125 $. Noter que, selon cette solution, Cidrosec ne ferait aucune publicité pour le Sukoe.

5. La firme Lemmi.

On associe une variable de décision entière à chacun des trois modèles :

x_j = nombre de tondeuses du modèles j montées au cours de la prochaine rafale,

où j = 1, 2, 3. L'objectif de Lemmi est de maximiser la contribution z aux frais d'exploitation et au profit retirée de la vente des tondeuses, où

$$z \; = \; 12\, x_1 + 20\, x_2 + 30\, x_3.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories. Il faut d'abord que le nombre de pièces requises de chaque type ne dépasse pas la quantité maximale acceptée par le fabricant.

Pistons $\qquad 2\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 \; \leq \; 3\,400$

Roues $\qquad 4\, x_1 + 5\, x_2 + 6\, x_3 \; \leq \; 8\,000$

Cylindres $1\ x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 \ \leq\ 2\ 000.$

Il faut de plus respecter les contraintes d'équilibre entre les modèles découlant de l'expérience.

$$x_1 - x_2 - x_3 \ \geq\ 0$$

$$x_2 - 2\ x_3 \ \geq\ 0.$$

L'unique solution optimale recommande de fabriquer 950 tondeuses du modèle 1, 300 du modèle 2 et 150 du modèle 3. La contribution aux frais d’exploitation et au profit associée à ce plan de production s'élève à 21 900 $.

6. CinéFam.

Le modèle comporte six variables entières :

x_J = nombre de téléviseurs de type J achetés (où J = A, B)

t_C = nombre de transformateurs assemblés par CinéFam

t_F = nombre de transformateurs achetés du fournisseur

e_C = nombre d’enceintes assemblées par CinéFam

e_F = nombre d’enceintes achetées du fournisseur.

L’objectif de CinéFam est de minimiser le capital z à investir dans la prochaine rafale, où

$$z \ =\ 570\ x_A + 575\ x_B + 100\ t_C + 110\ t_F + 60\ e_C + 70\ e_F.$$

Le modèle comprend sept contraintes technologiques. Il faut d'abord s’assurer que les unités de production requises par la prochaine rafale ne dépassent pas le nombre d’unités disponibles.

Disp Prod $120\ x_A + 140\ x_B + 10\ t_C + 10\ e_C \ \leq\ 28\ 000.$

De plus, CinéFam doit tenir compte des limites de 100 transformateurs et de 200 enceintes imposées par le fournisseur.

Max TF $t_F \ \leq\ 100$

Max EF $e_F \ \leq\ 200.$

Les transformateurs assemblés à l’interne ou achetés du fournisseur doivent être en quantité suffisante pour équiper tous les téléviseurs achetés. Il en est de même pour les enceintes.

Lien X–T $x_A + x_B - t_C - t_F \ \leq\ 0$

Lien X–E $2\ x_A + 2\ x_B - e_C - \mathrm{e}_F \ \leq\ 0.$

CinéFam doit respecter son engagement auprès des détaillants.

Demande $x_A + 140\ x_B \ \geq\ 180.$

La dernière contrainte traduit l'équilibre recherché entre les deux modèles.

Max A / B $x_A - 0{,}8\, x_B \leq 0$.

Le modèle admet plusieurs solutions optimales. L'une d'elles recommande d'acheter 80 téléviseurs A et 100 téléviseurs B, d'assembler à l'interne 180 transformateurs et de 260 enceintes, et enfin d'acheter du fournisseur 100 enceintes, mais aucun transformateur. Le capital à investir selon ce plan optimal s'élève à 138 100 $.

7. Fourniture de vêtements militaires.

(a) $z = 20\, x_1 + 16\, x_2 + 12\, x_3 + 16\, x_4 - 0{,}4\, y_1 - 0{,}5\, y_2 - 0{,}6\, y_3 - 0{,}8\, y_4$

(b) DÉFN Y2 $y_2 = 2\, x_1 + 4\, x_2 + 2\, x_3 + 2\, x_4$

(c) BUDGET $0{,}4\, y_1 + 0{,}5\, y_2 + 0{,}6\, y_3 + 0{,}8\, y_4 \leq 500\,000$

(d) Nous donnons un exemple de chaque catégorie, qui correspond l'un à l'atelier A1, l'autre au produit P1 :

3^e^ catégorie : MIN A1 $y_1 \geq 150\,000$
4^e^ catégorie : MIN P1 $x_1 \geq 4\,300$.

(e) BONNETS $x_4 \geq x_1 + x_2 + x_3$

Note. Voici le modèle construit par l'analyste.

Max $z = 20\, x_1 + 16\, x_2 + 12\, x_3 + 16\, x_4 - 0{,}4\, y_1 - 0{,}5\, y_2 - 0{,}6\, y_3 - 0{,}8\, y_4$

sous les contraintes technologiques suivantes :

DÉFN Y1	$2\, x_1 + 8\, x_2 + 4\, x_3 + 8\, x_4 - y_1 = 0$
DÉFN Y2	$2\, x_1 + 4\, x_2 + 2\, x_3 + 2\, x_4 - y_2 = 0$
DÉFN Y3	$4\, x_1 + 6\, x_2 + 6\, x_3 + 6\, x_4 - y_3 = 0$
DÉFN Y4	$4\, x_1 + 10\, x_2 + 4\, x_3 + 4\, x_4 - y_4 = 0$
BUDGET	$0{,}4\, y_1 + 0{,}5\, y_2 + 0{,}6\, y_3 + 0{,}8\, y_4 \leq 500\,000$
MIN A1	$y_1 \geq 150\,000$
MAX A1	$y_1 \leq 210\,000$
MAX A2	$y_2 \leq 90\,000$
MIN A3	$y_3 \geq 150\,000$
MAX A3	$y_3 \leq 210\,000$
MIN A4	$y_4 \geq 150\,000$
MAX A4	$y_4 \leq 210\,000$
MIN P1	$x_1 \geq 4\,300$
MIN P2	$x_2 \geq 5\,000$
MIN P3	$x_3 \geq 3\,500$

MIN P4 $x_4 \geq 12\,800$

BONNETS $-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 0.$

L'unique solution optimale, qui assurerait à l'intermédiaire un profit de 202 480 $, est décrite au tableau suivant.

h	1	2	3	4
x_h	8 800	5 000	3 500	17 300
y_h	210 000	79 200	190 000	168 400

8. Appel d'offres pour l'achat d'articles.

(a) Min $z = 2\,x_{A1} + 2{,}1\,x_{A2} + 1{,}9\,x_{A3} + \ldots + 8{,}3\,x_{H5} + 8{,}3\,x_{H7} + 8{,}3\,x_{H8}$

Cette fonction-objectif est exprimée en centaines de dollars.

(b) $1000 \leq 2\,x_{A1} + 7\,x_{C1} + 10\,x_{D1} + 3\,x_{E1} + 4\,x_{F1} + 2\,x_{G1} + 8\,x_{H1} \leq 3500$

(c) ARTICLE A $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} + x_{A6} + x_{A8} \geq 411$

(d) $20 \leq x_{H1} \leq 50$

Note. Le coût d'achat minimal pour l'ensemble des articles est de 1 726 965 $. Le modèle admet plusieurs solutions optimales. Le tableau suivant en décrit une : les entrées de la section centrale indiquent combien de centaines d'unités de chaque article seront commandées à chaque firme; la dernière ligne donne le chiffre d'affaire global de chaque firme, chiffre d'affaires arrondi à 1000 $ près et exprimé en milliers de dollars.

Article	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	Total
A	25	20	50	70	171	25	–	50	411
B	–	25	80	25	100	–	12	25	267
C	120	139	–	90	25	10	30	25	439
D	112	75	20	20	66	20	–	–	313
E	150	–	30	93	70	70	20	30	463
F	110	57	20	–	20	100	210	60	577
G	100	–	20	30	37	25	275	–	487
H	50	50	61	152	30	–	25	25	393
Total (en k$)	350	267	168	280	261	101	194	106	1727

9. Les crayons de Bleistift.

Le modèle comporte sept variables entières :

x_{JJ} = nombre de cartons de 1000 crayons de type *JJ* produits durant la prochaine rafale,

où *JJ* = CF, CG, JG, JS, OG, EF, ES. L'objectif de Bleistift est de maximiser le profit z découlant de la prochaine rafale, où

$$z = 126\, x_{CF} + 185\, x_{CG} + 218\, x_{JG} + 141\, x_{JS} + 330\, x_{OG} + 224\, x_{EF} + 186\, x_{ES}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en quatre catégories. En premier lieu, l'utilisation d'un atelier ne peut excéder son potentiel.

Sciage-cannelure $x_{CF} + 3{,}5\, x_{CG} + 2{,}5\, x_{JG} + 2{,}5\, x_{JS} + 4{,}5\, x_{OG} + 4\, x_{EF} + 4\, x_{ES} \leq 22\,670$

Mine-encollage $1{,}5\, x_{CF} + 2\, x_{CG} + 2\, x_{JG} + 2\, x_{JS} + 3{,}5\, x_{OG} + 2\, x_{EF} + 3\, x_{ES} \leq 16000$

Fraisage-polissage $2\, x_{CF} + 2{,}5\, x_{CG} + 2\, x_{JG} + 2\, x_{JS} + 3{,}5\, x_{OG} + 2{,}5\, x_{EF} + 3\, x_{ES} \leq 18\,000$

Peinture-séchage $x_{CF} + x_{CG} + x_{JG} + x_{JS} + 1{,}5\, x_{OG} + x_{EF} + x_{ES} \leq 8\,000$

Gomme-virole $x_{CF} + x_{CG} + x_{JG} + 2\, x_{OG} + 2\, x_{EF} \leq 7\,000$

Emballage $2\, x_{CF} + 2\, x_{CG} + 2\, x_{JG} + 2\, x_{JS} + 3\, x_{OG} + 2\, x_{EF} + 2\, x_{ES} \leq 13\,300.$

Ensuite, Bleistift doit tenir compte des contraintes que lui impose le marché nord-américain.

Mine-gros $x_{CG} + x_{JG} + x_{OG} \leq 1\,500$

Mine-fine $x_{CF} + x_{EF} \geq 2\,000.$

Bleistift doit également commander suffisamment d'érable et de cèdre.

Érable $x_{EF} + x_{ES} \geq 1\,000$

Cèdre $x_{CF} + x_{CG} \geq 1\,000.$

Enfin, Bleistift doit faire preuve de retenue écologique dans l'utilisation du bois de jelutong.

Jelutong $x_{JG} + x_{JS} \leq 400.$

Le profit découlant de la prochaine rafale s'élève à 1 325 580 francs belges au maximum. Le modèle admet plusieurs solutions optimales. Le tableau suivant décrit l'une d'elles.

Type de crayons	**CF**	**CG**	**JG**	**JS**	**OG**	**EF**	**ES**
Nombre de cartons	670	330	0	0	1170	1830	2065

10. La production de piles.

(a) Le modèle comporte trois variables entières :

x_1 = nombre de milliers de piles PS1 à fabriquer le mois prochain

x_2 = nombre de milliers de piles PS2 à fabriquer le mois prochain

x_C = nombre de milliers de piles PC à fabriquer le mois prochain.

La fonction-objectif z représentera le profit (en milliers de dollars) découlant d'un plan de production. Les coefficients de z doivent tenir compte des pertes provoquées par les piles mises au rebut. Celui de la variable x_1, par exemple, se calcule ainsi :

$$(0{,}25 \times 0{,}97) - (0{,}10 \times 0{,}03) = 0{,}2395.$$

Le premier terme de cette expression représente le profit apporté par les piles PS1 qui ont réussi le test de qualité; le second, la perte attribuable aux piles mises au rebut. L'objectif s'écrit :

$$\text{Max } z = 0{,}2395\, x_1 + 0{,}1967\, x_2 + 0{,}2126\, x_C\, .$$

Les contraintes, outre les contraintes d'intégrité et de non-négativité, sont :

Assemblage $\quad 30\, x_1 + 25\, x_2 + 24\, x_C \leq 36\,000$

Test $\quad 3\, x_1 + 4{,}5\, x_2 + 4\, x_C \leq 4\,680$

Isolation $\quad 14{,}55\, x_1 + 21{,}78\, x_2 + 20{,}58\, x_C \leq 27\,000.$

Une solution optimale donne :

$$x_1 = 660 \qquad x_C = 675 \qquad z = 301{,}575 \text{ (k\$)}.$$

Cette solution recommande de fabriquer 660 000 piles sèches de type 1 et 675 000 piles à combustible; la variable x_2, dont la valeur n'est pas mentionnée ci-dessus, est nulle. Le profit retiré par l'entreprise pour cette production s'établira à 301 575 $.

(b) Les variables de décision sont les mêmes. Les coefficients de la fonction-objectif doivent tenir compte cette fois des économies de main-d'oeuvre résultant de l'élimination des tests. Par exemple, le coefficient de x_1 se calcule maintenant ainsi :

$$0{,}25 + (9 \times 3 / 3600) = 0{,}2575.$$

Le nouveau modèle s'écrit :

$$\text{Max } z = 0{,}2575\, x_1 + 0{,}21125\, x_2 + 0{,}23\, x_C$$

sous les contraintes d'intégrité, de non-négativité et sous les contraintes suivantes :

Assemblage $\quad 30\, x_1 + 25\, x_2 + 24\, x_C \leq 36\,000$

Isolation $\quad 15\, x_1 + 22\, x_2 + 21\, x_C \leq 27\,000.$

Voici un nouveau plan optimal de production :

$$x_1 = 400 \qquad x_C = 1000 \qquad z = 333 \ \text{(k\$)}.$$

Dans le contexte d'un investissement en qualité totale, on fabriquerait les deux mêmes piles que sans cet investissement, mais en quantités différentes. Le profit optimal augmenterait de 31 425 $.

11. La fusion de deux sociétés.

Le modèle comporte quatre variables non négatives :

x_j = nombre de personnes-heures consacrées chez X à la fabrication du produit Pj

y_j = nombre de personnes-heures consacrées chez Y à la fabrication du produit Pj

où $j = 1, 2$. L'objectif est de minimiser les coûts de main-d'oeuvre :

$$\text{Min } z = 10\,x_1 + 11\,x_2 + 12\,y_1 + 9\,y_2\,.$$

Les contraintes, outre les contraintes de non-négativité, sont :

Société X	$x_1 + x_2 \leq 30\,000$
Société Y	$y_1 + y_2 \leq 18\,000$
Produit P1	$4\,x_1 + 3\,y_1 = 121\,500$
Produit P2	$4\,x_2 + 6\,y_2 = 102\,000$.

Une solution optimale donne :

$$x_1 = 30\,000 \qquad y_1 = 500 \qquad y_2 = 17\,000 \qquad z = 459\,000 \ \text{(dollars)}.$$

La même convention que dans le problème précédent est utilisée ici : seules les variables dont la valeur est positive dans la solution considérée sont énumérées dans la liste; les variables omises sont nulles. Dans l'exemple ci-dessus, x_2 n'apparaît pas, ce qui implicitement signifie que x_2 prend la valeur 0 dans la solution optimale décrite.

12. Skidoo.

Le modèle comporte 15 variables entières définies ainsi :

x_{ij} = nombre de motoneiges louées au début du mois i jusqu'au début du mois j.

L'objectif du pourvoyeur est de minimiser le coût total z de location, où

$$z = 1150x_{12} + 1650x_{13} + 2050x_{14} + 2350x_{15} + 2600x_{16} + 1150x_{23} + 1650x_{24} + \ldots + 1650x_{46} + 1150x_{56}.$$

Il faut exiger, outre que les variables soient non négatives et entières, que les motoneiges louées suffiront à répondre à la demande. Par conséquent, le pourvoyeur doit s'assurer que, pour chacun des cinq mois de la période considérée, le nombre de motoneiges disponibles pendant ce mois-là ne sera pas inférieur au nombre prévu de clients.

Mois 1 $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq 50$

Mois 2 $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \geq 60$

Mois 3 $x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 40$

Mois 4 $x_{15} + x_{16} + x_{25} + x_{26} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} \geq 85$

Mois 5 $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 25$.

Une solution optimale donne :

$$x_{15} = x_{16} = x_{45} = 25 \qquad x_{25} = 10 \qquad z = 173\,000 \text{ (dollars)}.$$

13. La politique d'achats d'Arma.

Le modèle comporte 2 variables entières définies ainsi :

x_{janv} = nombre de pièces achetées début janvier

x_{avril} = nombre de pièces achetées début avril.

La fonction-objectif z est la somme des coûts d'achat et des coûts d'entreposage pendant chacun des deux trimestres :

$$z = Achat + Entr\text{-}1 + Entr\text{-}2,$$

où

$Achat = 5\, x_{\text{janv}} + 6\, x_{\text{avril}}$

$Entr\text{-}1 = 0{,}50\, [\, x_{\text{janv}} + (x_{\text{janv}} - 1200) + (x_{\text{janv}} - 1200 - 1500)\,]$

$Entr\text{-}2 = 0{,}60\, [\, (x_{\text{janv}} + x_{\text{avril}} - 4500) + (x_{\text{janv}} + x_{\text{avril}} - 6500) + (x_{\text{janv}} + x_{\text{avril}} - 9500)\,]$.

Si l'on ne tient pas compte des constantes, l'objectif se ramène à

$$\text{Min } z = 8{,}30\, x_{\text{janv}} + 7{,}80\, x_{\text{avril}}.$$

Les contraintes, outre les contraintes de non-négativité et d'intégrité, sont :

$$x_{\text{janv}} \geq 4\,500$$

$$x_{\text{janv}} + x_{\text{avril}} = 11\,600.$$

Une solution optimale donne :

$$x_{\text{janv}} = 4\,500 \qquad x_{\text{avril}} = 7\,100 \qquad z = 92\,730\,.$$

14. Embauche de personnel chez Vallée.

Le modèle comporte deux groupes de trois variables : les premières, notées x_j, indiquent combien de travailleurs seront embauchés le mois j et sont soumises à une contrainte d'intégrité; les secondes, notées y_j, sont associées à la politique de temps supplémentaire pendant ce mois-là. Ces variables sont définies ainsi :

x_j = nombre d'employés embauchés au début du mois j

y_j = nombre de mois-personnes fournis par les employés chevronnés pendant le mois j sous la forme d'heures supplémentaires.

Le modèle s'écrit :

Min $z = 375\ x_1 + 375\ x_2 + 375\ x_3 + 2100\ y_1 + 2100\ y_2 + 2100\ y_3$

sous les contraintes :

Mois 1	$0{,}18\ x_1 + y_1 = 20$	
Mois 2	$0{,}4\ x_1 + 0{,}18\ x_2 + y_2 = 45$	
Mois 3	$0{,}36\ x_1 + 0{,}4\ x_2 + 0{,}18\ x_3 + y_3 = 60$	
Max Emb j	$x_j \le 35$	$j = 1, 2, 3$
Max Supp j	$y_j \le 40$	$j = 1, 2, 3.$

où les six variables de décision sont non négatives et où les variables x_j sont entières. Une solution optimale donne :

$x_1 = x_2 = x_3 = 35$ $y_1 = 13{,}7$ $y_2 = 24{,}7$ $y_3 = 27{,}1$ $z = 176\ 925.$

Note. Indiquons comment a été obtenue l'équation « MOIS 1 ». Le 1^er^ mois, les besoins en personnel de Vallée, qui s'élèvent à 200 mois-personnes, seront comblés en partie par les anciens employés et en partie par les nouveaux qui seront embauchés au début du mois. Les 180 anciens employés fourniront $(180 + y_1)$ mois-personnes; des x_1 nouveaux employés, $(0{,}9\ x_1)$ resteront suffisamment longtemps pour compter dans la force de travail et ils fourniront l'équivalent de $(0{,}2 \times 0{,}9\ x_1)$ mois-personnes. Par conséquent,

$$200 = (180 + y_1) + (0{,}2 \times 0{,}9\ x_1)$$

ce qui se récrit

$$0{,}18\ x_1 + y_1 = 20.$$

15. Politique de rotation des ingénieurs à l'Ile d'Anticosti.

Les variables de décision forment quatre groupes et représentent combien d'ingénieurs seront en poste, ajoutés, ramenés ou manquants le mois j :

x_{pj} : en poste dans l'île d'Anticosti au cours du mois j

x_{aj} : ajoutés à l'équipe en place au début du mois j

x_{rj} : ramenés à Montréal au début du mois j

x_{mj} : manquants au cours du mois j par rapport au nombre requis ce mois-là.

L'objectif consiste à minimiser les coûts totaux z :

$$z = 5\,000\ NbP + 2\,000\ NbA + 3\,200\ NbR + 6\,000\ NbM$$

où

$$NbP = x_{p1} + x_{p2} + x_{p3} + x_{p4} + x_{p5} + x_{p6}$$

$$NbA = x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} + x_{a4} + x_{a5} + x_{a6}$$

$$NbR = x_{r2} + x_{r3} + x_{r4} + x_{r5} + x_{r6} + x_{r7}$$

$$NbM = x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + x_{m4} + x_{m5} + x_{m6}.$$

Toutes les variables sont entières et non négatives. Les contraintes technologiques se regroupent en six catégories.

L'équation « Défn xPj » détermine le nombre d'ingénieurs en poste le mois j :

Défn xP1	$x_{p1} = x_{a1}$
Défn xP2	$x_{p2} = x_{a2} - x_{r2} + x_{p1}$
Défn xP3	$x_{p3} = x_{a3} - x_{r3} + x_{p2}$
Défn xP4	$x_{p4} = x_{a4} - x_{r4} + x_{p3}$
Défn xP5	$x_{p5} = x_{a5} - x_{r5} + x_{p4}$
Défn xP6	$x_{p6} = x_{a6} - x_{r6} + x_{p5}$.

L'inéquation « Mois j » garantit que les besoins du mois j en ingénieurs seront comblés :

Mois 1	$x_{p1} + x_{m1} \geq 3$
Mois 2	$x_{p2} + x_{m2} \geq 5$
Mois 3	$x_{p3} + x_{m3} \geq 8$
MOIS 4	$x_{p4} + x_{m4} \geq 7$
Mois 5	$x_{p5} + x_{m5} \geq 9$
Mois 6	$x_{p6} + x_{m6} \geq 3$.

L'inéquation « Max Aj » limite à 3 le nombre d'ingénieurs ajoutés au début du mois j :

Max Aj $\quad x_{aj} \leq 3 \quad\quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

L'inéquation « Max Rj » garantit que pas plus du tiers des ingénieurs présents sur le site seront ramenés à Montréal au début du mois j :

Max R2	$3\ x_{r2} \leq x_{p1}$
Max R3	$3\ x_{r3} \leq x_{p2}$
Max R4	$3\ x_{r4} \leq x_{p3}$
Max R5	$3\ x_{r5} \leq x_{p4}$

Max R6 $3\ x_{r6} \leq x_{p5}$.

L'équation « Défn XR7 » traduit l'engagement de SMD de ramener à Montréal au début de novembre tous les ingénieurs encore présents dans l'île :

Défn XR7 $x_{r7} = x_{p6}$.

Enfin, l'inéquation « Max M*j* » limite le nombre d'heures supplémentaires durant le mois *j* :

Max M*j* $x_{mj} \leq 0{,}3\ x_{pj}$ $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Le tableau ci-dessous décrit une politique optimale de rotation des ingénieurs, dont le coût est de 224 400 \$. Cinq ingénieurs seront ramenés à la fin de la saison, début novembre.

Nb d'ingénieurs	Mois					
	1	2	3	4	5	6
ajoutés	3	2	2	0	0	0
ramenés	–	0	0	0	0	2
en poste	3	5	7	7	7	5
manquants	0	0	1	0	2	0

16. L'assemblage de gadgets électroniques chez Balan.

Les variables de décision forment deux groupes et sont définies de la façon suivante :

x_j = nombre de minutes travaillées au cours d'un quart de travail par l'ouvrier *j*

y_1 = nombre de chronomètres assemblés au cours d'un quart de travail

y_2 = nombre de calculatrices assemblées au cours d'un quart de travail.

L'objectif consiste à maximiser le profit *z* par quart de travail :

$$z = 2\ y_1 + 2{,}50\ y_2\ .$$

Les variables y_j doivent être entières. Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories.

L'équation « Défn x*j* » détermine le temps de travail de l'ouvrier *j* par quart :

Défn x1 $x_1 = 3{,}5\ y_1 + 3\ y_2$

Défn x2 $x_2 = 3\ y_1 + 3{,}25\ y_2$

Défn x3 $x_3 = 3\ y_1 + 3{,}5\ y_2$

Défn x4 $x_4 = 3\ y_1 + 4\ y_2$.

L'inéquation « Disp Oj » limite à $8 \times 60 = 480$ minutes la durée du quart de l'ouvrier j :

Disp Oj $\quad x_j \leq 480 \qquad j = 1, 2, 3, 4.$

Enfin, les contraintes « Écart j-h », où $j \neq h$, garantissent que l'écart entre les temps de travail de deux ouvriers ne dépasse jamais 45 minutes :

Écart j-h $\quad x_j - x_h \leq 45 \qquad j = 1, 2, 3, 4$ et $h = 1, 2, 3, 4$ et $j \neq h$.

Une solution optimale recommande d'assembler 96 chronomètres et 48 calculatrices par jour. Les ouvriers 1, 2, 3 et 4 travaillent alors 480, 444, 456 et 480 minutes respectivement. Ce plan assure à Balan un profit quotidien de 312 $.

17. Zoo.

Le modèle comporte cinq variables de décision, une pour chacun des produits :

x_J = nombre de kilogrammes du produit J utilisés dans les 100 kg du mélange.

Le modèle s'écrit :

$$\text{Min } z = 16\, x_A + 14\, x_B + 16\, x_C + 12\, x_D + 13\, x_E$$

sous les contraintes usuelles de non-négativité et sous les contraintes technologiques suivantes :

Plancton	$0{,}5\, x_A + 0{,}45\, x_B + 0{,}31\, x_C + 0{,}25\, x_D + 0{,}1\, x_E \geq 30$
Neutr Min	$0{,}1\, x_A + 0{,}15\, x_B + 0{,}27\, x_C + 0{,}3\, x_D + 0{,}25\, x_E \geq 10$
Neutr Max	$0{,}1\, x_A + 0{,}15\, x_B + 0{,}27\, x_C + 0{,}3\, x_D + 0{,}25\, x_E \leq 20$
Ph Min	$0{,}15\, x_A + 0{,}2\, x_B + 0{,}06\, x_C + 0{,}05\, x_D + 0{,}38\, x_E \geq 10$
Ph Max	$0{,}15\, x_A + 0{,}2\, x_B + 0{,}06\, x_C + 0{,}05\, x_D + 0{,}38\, x_E \leq 20$
Sels	$0{,}25\, x_A + 0{,}2\, x_B + 0{,}36\, x_C + 0{,}4\, x_D + 0{,}27\, x_E \geq 30$
Total	$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 100$
Disp A	$x_A \leq 100$
Disp B	$x_B \leq 50$
Disp C	$x_C \leq 60$
Disp D	$x_D \leq 30$
Disp E	$x_E \leq 10.$

Une solution optimale donne :

$x_A = 34 \qquad x_B = 16 \qquad x_C = 10 \qquad x_D = 30 \qquad x_E = 10 \qquad z = 1\,418.$

18. Les engrais et le maraîcher.

(a) $z = 0{,}0725\, x_1 + 0{,}0725\, x_2 + \ldots + 0{,}0725\, x_6 + 0{,}075\, y_1 + 0{,}06\, y_2 + \ldots + 0{,}0775\, y_6$

(b) Voici les contraintes « DÉFN XT » et « MAXIMUM » :

DÉFN XT $x_T = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

MAXIMUM $x_T \leq 25\,000$.

(c) La teneur en azote du mélange doit se situer entre 30% et 35%. Le poids de l'azote dans le mélange doit donc ne pas être inférieur à 30% ni être supérieur à 35% du poids total du mélange :

MIN AZOTE $0{,}30\, x_T \leq 0{,}09\, x_1 + 0{,}1\, x_2 + 0{,}27\, x_3 + 0{,}39\, x_4 + 0{,}38\, x_5$

MAX AZOTE $0{,}35\, x_T \geq 0{,}09\, x_1 + 0{,}1\, x_2 + 0{,}27\, x_3 + 0{,}39\, x_4 + 0{,}38\, x_5$.

(d) Les 7 500 kg d'engrais 1 disponibles seront soit utilisés dans le mélange, soit bradés directement :

DISP 1 $x_1 + y_1 = 7\,500$.

Note. Voici le modèle linéaire utilisé par la coopérative :

Max $z = 0{,}0725\, x_1 + 0{,}0725\, x_2 + \ldots + 0{,}0725\, x_6 + 0{,}075\, y_1 + 0{,}06\, y_2 + \ldots + 0{,}0775\, y_6$

sous les contraintes technologiques :

DÉFN XT $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_T = 0$

MIN AZOTE $0{,}09\, x_1 + 0{,}10\, x_2 + 0{,}27\, x_3 + 0{,}39\, x_4 + 0{,}38\, x_5 - 0{,}30\, x_T \geq 0$

MAX AZOTE $0{,}09\, x_1 + 0{,}10\, x_2 + 0{,}27\, x_3 + 0{,}39\, x_4 + 0{,}38\, x_5 - 0{,}35\, x_T \leq 0$

MIN CHAUX $0{,}02\, x_1 + 0{,}06\, x_2 + 0{,}12\, x_3 + 0{,}24\, x_4 + 0{,}17\, x_5 + 0{,}40\, x_6 - 0{,}18\, x_T \geq 0$

MAX CHAUX $0{,}02\, x_1 + 0{,}06\, x_2 + 0{,}12\, x_3 + 0{,}24\, x_4 + 0{,}17\, x_5 + 0{,}40\, x_6 - 0{,}22\, x_T \leq 0$

MIN PHOSPH $0{,}27\, x_1 + 0{,}37\, x_2 + 0{,}40\, x_3 + 0{,}12\, x_4 + 0{,}28\, x_5 - 0{,}25\, x_T \geq 0$

MAX PHOSPH $0{,}27\, x_1 + 0{,}37\, x_2 + 0{,}40\, x_3 + 0{,}12\, x_4 + 0{,}28\, x_5 - 0{,}30\, x_T \leq 0$

MIN CALCIT $0{,}16\, x_1 + 0{,}15\, x_2 + 0{,}11\, x_3 + 0{,}25\, x_4 + 0{,}05\, x_5 - 0{,}10\, x_T \geq 0$

MAX CALCIT $0{,}16\, x_1 + 0{,}15\, x_2 + 0{,}11\, x_3 + 0{,}25\, x_4 + 0{,}05\, x_5 - 0{,}16\, x_T \leq 0$

DISP 1 $x_1 + y_1 = 7\,500$

DISP 2 $x_2 + y_2 = 6\,000$

DISP 3 $x_3 + y_3 = 3\,000$

DISP 4 $x_4 + y_4 = 12\,000$

DISP 5 $x_5 + y_5 = 10\,000$

DISP 6 $x_6 + y_6 = 11\,000$

MAXIMUM $x_T \leq 25\,000$.

Le tableau suivant décrit une solution optimale, qui assure à la coopérative un revenu de 3 640,83 $.

i	1	2	3	4	5	6	T
x_i	–	3 735,8	3 000	5 996,4	10 000	1 675,05	24 407,26
y_i	7 500	2 264,2	–	6 003,6	–	9 324,95	

19. Le chocolatier-confiseur.

Les 3 000 assortiments seront confectionnés de la même manière, car une recette qui est optimale pour un assortiment l'est pour tous. Les quantités totales utilisées de chaque sorte de chocolats, et par conséquent les quantités achetées, s'obtiennent en multipliant par 3 000 cette recette optimale. Et réciproquement, pour résoudre le problème du chocolatier-confiseur, il suffit de connaître le nombre de kg à acheter de chaque sorte, puis de diviser par 3 000 pour obtenir la recette. De ces remarques découle immédiatement la définition des trois variables de décision suivantes :

x_j = nombre de kg de chocolats j que se procurera le confiseur.

Le chocolatier-confiseur poursuit l'objectif de maximiser les profits z qu'il tirera de la vente des 3 000 assortiments qu'il s'est engagé à fournir, où

$$z = 4\,x_1 + 6{,}55\,x_2 + 5{,}60\,x_3.$$

Expliquons brièvement comment ont été obtenus les coefficients de cette fonction-objectif. D'abord, un kg de chocolats se vend toujours 8$, puisque c'est là le prix de vente de chaque assortiment et que chaque assortiment pèse un kg. Mais le prix d'achat varie d'une sorte de chocolats à l'autre. C'est ainsi que le profit réalisé sur un kg de chocolats 1 s'établit à 8 – 4 = 4 dollars. De même, le profit est de 8 – 1,45 = 6,55 dollars par kg de chocolats 2, et de 8 – 2,40 = 5,60 dollars par kg de chocolats 3.

Le modèle comprend cinq contraintes technologiques. La première exige que les achats du chocolatier-confiseur soient suffisants pour satisfaire la commande :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3000.$$

Les autres traduisent les équilibres souhaités quant aux poids des différents chocolats. Dire que les chocolats 1 représentent au moins 10% du poids total dans chaque assortiment revient à imposer que

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq \frac{10}{100}$$

c'est-à-dire, après simplifications,

$$0{,}9\,x_1 - 0{,}1\,x_2 - 0{,}1\,x_3 \geq 0.$$

De même, que la quantité de chocolats 1 dans chaque assortiment représente au plus 20% du poids total peut s'écrire comme suit :

$$0{,}8\ x_1 - 0{,}2\ x_2 - 0{,}2\ x_3 \leq 0.$$

Les chocolats 1 et 2 présents dans un assortiment ne doivent pas peser plus de 800 grammes :

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{80}{100}$$

ce qui se récrit ainsi :

$$0{,}2\ x_1 + 0{,}2\ x_2 - 0{,}8\ x_3 \leq 0.$$

Enfin, la condition selon laquelle les chocolats 1 et 3 doivent constituer au moins la moitié du poids d'un assortiment se représente ainsi :

$$0{,}5\ x_1 - 0{,}5\ x_2 + 0{,}5\ x_3 \geq 0.$$

Voici une solution optimale de ce modèle qui assure un profit de 17 745 dollars au chocolatier-confiseur :

$$x_1 = 300 \qquad x_2 = 1\,550 \qquad x_3 = 1\,200.$$

Note. Il existe d'autres façons de modéliser ce problème. Par exemple, puisque le poids total des intrants s'élèvera à 3 000 kg, on peut reformuler les quatre dernières contraintes technologiques en substituant 3 000 à ($x_1 + x_2 + x_3$) dans les dénominateurs. Le modèle s'écrit alors comme suit :

Max $z = 4\ x_1 + 6{,}55\ x_2 + 5{,}60\ x_3$

sous les contraintes:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3000$

$x_1 \geq 300$

$x_1 \leq 600$

$x_1 + x_2 \leq 2\,400$

$x_1 + x_3 \geq 1\,500$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0.$

20. Les mélanges de SOS.

Le modèle comporte 3 × (4+1) = 15 variables de décision primaires définies de la façon suivante :

$x_{I\,j}$ = nombre de litres du liquide de base *I* dans le mélange M*j*

$x_{I\,\mathrm{V}}$ = nombre de litres du liquide *I* vendus hors mélange,

où *I* = A, B, C et où *j* = 1, 2, 3, 4. On ajoute, pour simplifier l'écriture du modèle, des variables d'étape :

y_I = nombre de litres du liquide de base *I* achetés

x_j = nombre de litres du mélange M*j* fabriqués et vendus,

où, comme précédemment, *I* = A, B, C et *j* = 1, 2, 3, 4.

SOS cherche à maximiser la contribution z aux coûts d'exploitation et aux profits, où

$$z = \mathit{Ventes} - \mathit{Achats}$$

où

$$\mathit{Ventes} = 2{,}5\, x_1 + 3{,}25\, x_2 + 3{,}85\, x_3 + 2{,}65\, x_4 + 1{,}75\, x_{AV} + 2{,}25\, x_{BV} + 3{,}3\, x_{CV}$$

$$\mathit{Achats} = 1{,}5\, y_A + 2\, y_B + 3{,}25\, y_C.$$

Les contraintes technologiques forment quatre groupes. Les deux premiers relient les variable d'étape aux variables primaires. Tout d'abord, la quantité vendue ou utilisée d'un liquide ne peut dépasser la quantité disponible :

$$y_A = x_{AV} + x_{A1} + x_{A2} + x_{A4} \quad \text{et} \quad y_A \le 350$$

$$y_B = x_{BV} + x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} \quad \text{et} \quad y_B \le 425$$

$$y_C = x_{CV} + x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} \quad \text{et} \quad y_C \le 375.$$

Ensuite, la quantité vendue d'un mélange est égale à la quantité fabriquée :

$$x_1 = x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}$$

$$x_2 = x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}$$

$$x_3 = x_{B3} + x_{C3}$$

$$x_4 = x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}.$$

Le 3e groupe traduit les conditions imposées dans la composition des mélanges :

$$x_{A1} \ge 0{,}30\, x_1 \quad \text{et} \quad x_{B1} = 0{,}25\, x_1 \quad \text{et} \quad x_{C1} \ge 0{,}20\, x_1$$

$$x_{A2} \le 0{,}50\, x_2 \quad \text{et} \quad x_{B2} \ge 0{,}32\, x_2 \quad \text{et} \quad x_{C2} \le 0{,}36\, x_2$$

$$x_{B3} \le 0{,}40\, x_3 \quad \text{et} \quad x_{C3} \ge 0{,}25\, x_3$$

$$x_{A4} = 0{,}40\, x_4 \quad \text{et} \quad x_{B4} \ge 0{,}10\, x_4 \quad \text{et} \quad x_{C4} \ge 0{,}30\, x_4.$$

Enfin, le 4e groupe se réduit à une inéquation assurant que la production de M2 représente au moins 40% de la production totale :

$$-0{,}4\, x_1 + 0{,}6\, x_2 - 0{,}4\, x_3 - 0{,}4\, x_4 \ge 0.$$

Au maximum, SOS peut retirer 1 413,75 dollars de la vente des mélanges et des liquides de base. Voici une solution optimale :

$x_2 = 700$	$x_{A2} = 350$	$x_{B2} = 350$
$x_3 = 450$	$x_{B3} = 75$	$x_{C3} = 375$
$y_A = 350$	$y_B = 425$	$y_C = 375.$

Rappelons que, par convention, les variables dont les valeurs ne sont pas données explicitement sont nulles dans la solution considérée. Ainsi, SOS ne vendra aucun liquide de base directement sur le marché; elle ne produira pas de mélange M1, ni de mélange M4.

21. Construction d'un horaire pour la livraison de colis.

Le modèle comporte vingt-huit variables entières définies de la façon suivante :

x_{jd} = nombre de livreurs convoqués au début de la période numéro j pour travailler pendant d heures

où $j = 1, 2, ..., 7$ et $d = 2, 3, ..., 8$ et $j + d \leq 9$. Le coefficient c_{jd} de la variable x_{jd} dans la fonction-objectif s'obtient comme suit.

- Si $d \geq 6$, alors c_{jd} représente la somme des frais d'administration de 5 $ et du salaire de l'employé :
$$c_{jd} = 5 + 10\, d.$$
- Si $d < 6$, alors une prime de 12 $ s'ajoute :
$$c_{jd} = 5 + 10\, d + 12.$$

La fonction-objectif z, que l'on cherche à minimiser, s'écrit donc :

$$z = 37\, x_{12} + 47\, x_{13} + 57\, x_{14} + \ldots + 85\, x_{18} + 37\, x_{22} + \ldots + 47\, x_{63} + 37\, x_{72}.$$

Le modèle comporte huit contraintes technologiques, nommées « Période i », où $i = 1, 2, ..., 8$, qui garantissent que les livreurs seront toujours en nombre suffisant pour livrer les colis. Plus précisément, la contrainte « Période i » exige que le rendement total des livreurs travaillant durant la période numéro i ne soit pas inférieur au poids total des colis attendus pendant cette période. Le rendement d'un livreur est estimé comme suit.

- On considère qu'un livreur convoqué pour moins de 6 heures a un rendement de 40 kg pendant chacune des heures de son quart de travail. On posera donc égal à 40 le coefficient de x_{jd} dans « Période i » quand $j \leq i$ et $i < j + d \leq 9$ et $d < 6$.
- Par ailleurs, les livreurs qui travaillent 6 heures ou plus bénéficient d'une heure de pause, que l'on présumera répartie uniformément durant leur temps de travail. Par conséquent, le coefficient de x_{jd} dans « Période i » sera posé :

égal à $40 \times 5 / 6 = 33{,}333$	quand $j \leq i$ et $i < j + d \leq 9$ et $d = 6$
égal à $40 \times 6 / 7 = 34{,}286$	quand $j \leq i$ et $i < j + d \leq 9$ et $d = 7$
égal à $40 \times 7 / 8 = 35$	quand $j \leq i$ et $i < j + d \leq 9$ et $d = 8$.

Par exemple, la contrainte « Période 2 » s'écrit ainsi :

$$40\,(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) + 33{,}333\,(x_{16} + x_{26}) + 34{,}286\,(x_{17} + x_{27}) + 35\, x_{18} \geq 250.$$

Une solution optimale donne :

$x_{15} = 1$	$x_{18} = 8$	$x_{32} = 1$
$x_{34} = 1$	$x_{45} = 2$	$x_{72} = 6$

$z = 1\,197$ (dollars).

22. Pentathlon.

Le modèle comporte 5 × 4 = 20 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$v_{IJ} = 1 \quad \text{si André choisit d'accomplir l'épreuve } I \text{ au niveau } J,$$

où I = A, B, C, D, E et où J = S, C, E, A.

L'objectif d'André est de minimiser le temps requis z par l'ensemble des cinq épreuves, où

$$z \;=\; 65\, v_{\mathrm{AS}} + 72\, v_{\mathrm{AC}} + 75\, v_{\mathrm{AE}} + 78\, v_{\mathrm{AA}} + 100\, v_{\mathrm{BS}} + \ldots + 48\, v_{\mathrm{EE}} + 49\, v_{\mathrm{EA}}.$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes. Le premier, composé de 5 équations, exige que chaque épreuve soit complétée :

Épreuve I $\qquad v_{I\mathrm{S}} + v_{I\mathrm{C}} + v_{I\mathrm{E}} + v_{\mathrm{A}I} \;=\; 1 \qquad I$ = A, B, C, D, E.

Le second, réduit à une inéquation, limite l'effort total requis par les cinq épreuves à un maximum de 100 points :

Budget $\qquad 20\, v_{\mathrm{AS}} + 15\, v_{\mathrm{AC}} + 10\, v_{\mathrm{AE}} + 8\, v_{\mathrm{AA}} + 30\, v_{\mathrm{BS}} + \ldots + 35\, v_{\mathrm{EE}} + 30\, v_{\mathrm{EA}} \leq 100.$

André peut terminer les cinq épreuves en 383 minutes, s'il accomplit les épreuves A, D et E au niveau adepte, l'épreuve B au niveau champion et l'épreuve C au niveau surhomme. Il utilise alors 99 des 100 points à sa disposition.

23. La société Volauvent.

(a) Le modèle comporte 6 × 4 = 24 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$v_{Ij} = 1 \quad \text{si le vol à destination de la ville } I \text{ est fixé à l'heure } j,$$

où I = R, M, B, V, J, L et j = 6, 8, 10, 13. L'objectif est de maximiser les profits quotidiens attendus z, où

$$z = 11\, v_{\mathrm{R6}} + 10\, v_{\mathrm{R8}} + 11\, v_{\mathrm{R10}} + 12\, v_{\mathrm{R13}} + 14\, v_{\mathrm{M6}} + \ldots + 6\, v_{\mathrm{L10}} + 4\, v_{\mathrm{L13}}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories. Il faut d'abord que chacune des six villes soient desservies :

Ville I $\qquad v_{I6} + v_{I8} + v_{I10} + v_{I13} = 1 \qquad I$ = R, M, B, V, J, L.

Volauvent doit également s'assurer que, pour chacune des heures de départ considérées, au plus 2 vols soient planifiés :

Départ jh $\qquad v_{\mathrm{R}j} + v_{\mathrm{M}j} + v_{\mathrm{B}j} + v_{\mathrm{V}j} + v_{\mathrm{J}j} + v_{\mathrm{L}j} \leq 2 \qquad j$ = 6, 8, 10, 13.

Volauvent peut espérer des profits quotidiens de 61 000 $ en inscrivant les vols à destination de Val-d'Or et Lac-Mégantic à 6h, ceux vers Jonquière et Matane à 8h, et enfin ceux vers Rivière-du-Loup et Baie-Comeau à 13h :

$$v_{\mathrm{V6}} = v_{\mathrm{L6}} = v_{\mathrm{J8}} = v_{\mathrm{M8}} = v_{\mathrm{R13}} = v_{\mathrm{B13}} = 1.$$

(b) On modifie la contrainte « Départ 6h » du modèle précédent comme suit :

Départ 6h $v_{Rj} + v_{Mj} + v_{Bj} + v_{Vj} + v_{Jj} + v_{Lj} \leq 3.$

Le profit quotidien attendu maximal augmente à 62 000 $ si Volauvent inscrit les vols à destination de Val-d'Or, Lac-Mégantic et Jonquière à 6h, ceux vers Matane, Rivière-du-Loup et Baie-Comeau à 13h :

$$v_{V6} = v_{L6} = v_{J8} = v_{M8} = v_{R13} = v_{B13} = 1.$$

L'entreprise serait donc prête à débourser jusqu'à 1 000 $ par jour pour obtenir une aire d'embarquement supplémentaire à 6 h.

24. Appels d'offres pour des projets de grande envergure.

Le modèle comporte 10 × 8 = 80 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$v_{Lj} = 1 \text{ si les services de l'entreprise } L \text{ sont retenus pour le projet } j,$$

où L = A, B, C, …, J et j = 1, 2, …, 8. L'objectif est de minimiser le coût total z des différents projets, où

$$z = 50\, v_{A1} + 40\, v_{B1} + 55\, v_{C1} + \ldots + 330\, v_{J8}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories. Les équations « Projet j », où j = 1, 2, ..., 8, exigent que le projet correspondant soit accordé à une et une seule entreprise :

Projet j $v_{Aj} + v_{Bj} + v_{Cj} + v_{Dj} + v_{Ej} + v_{Fj} + v_{Gj} + v_{Hj} + v_{Ij} + v_{Jj} = 1$ $j = 1, 2, ..., 8.$

Les inéquations « Entrepr L », où L = A, B, ..., J, exigent que l'entreprise correspondante ne se voit pas attribuer plus de 2 projets :

Entrepr L $v_{L1} + v_{L2} + v_{L3} + v_{L4} + v_{L5} + v_{L6} + v_{L7} + v_{L8} \leq 2$ L = A, B, ..., J.

Enfin, il faut s'assurer que les deux règles secrètes soient respectées :

RéglS 1 $\displaystyle\sum_{L=G}^{J} \sum_{j=1}^{6} v_{Lj} \leq 3$

RéglS 2 $v_{A4} + v_{B4} + v_{C4} + v_{D4} + v_{A8} + v_{B8} + v_{C8} + v_{D8} \geq 1.$

Une solution optimale est décrite dans le tableau ci-dessous. Le coût total des 8 projets, si le gouvernement suivait les prescriptions de cette solution pour accorder les contrats, serait de 104 300 000 dollars.

Projet	1	2	3	4	5	6	7	8
Entreprise	J	C	A	C	I	A	H	J

25. Transport routier au Sahel.

Le modèle comporte 4 × 7 = 28 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$v_{ij} = 1 \quad \text{si le camion } i \text{ transporte le conteneur } j,$$

où $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2, \ldots, 7$. L'objectif est de maximiser la somme z des priorités, où

$$z = 5(v_{11} + v_{21} + v_{31} + v_{41}) + 2(v_{12} + v_{22} + v_{32} + v_{42}) + \ldots + 3(v_{17} + v_{27} + v_{37} + v_{47}).$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes. Les inéquations du premier interdisent que le fret transporté par un camion excède sa capacité :

Camion 1 $\quad 3\,v_{11} + 4\,v_{12} + 2\,v_{13} + v_{14} + 2\,v_{15} + 3\,v_{16} + 4\,v_{17} \leq 2$

Camion 2 $\quad 3\,v_{21} + 4\,v_{22} + 2\,v_{23} + v_{24} + 2\,v_{25} + 3\,v_{26} + 4\,v_{27} \leq 3$

Camion 3 $\quad 3\,v_{31} + 4\,v_{32} + 2\,v_{33} + v_{34} + 2\,v_{35} + 3\,v_{36} + 4\,v_{37} \leq 6$

Camion 4 $\quad 3\,v_{41} + 4\,v_{42} + 2\,v_{43} + v_{44} + 2\,v_{45} + 3\,v_{46} + 4\,v_{47} \leq 7.$

Celles du second exigent qu'un conteneur soit attribué à au plus un camion :

Conteneur j $\quad v_{1j} + v_{2j} + v_{3j} + v_{4j} \leq 1 \quad j = 1, 2, \ldots, 7.$

L'allocation décrite au tableau suivant permet de transporter 6 des 7 des conteneurs lors du premier convoi. La somme z des priorités est alors égale à 30.

Conteneur	1	2	3	4	5	6	7
Camion	3	–	2	2	1	3	4

Note. Lorsque le poids d'un conteneur j excède le tonnage maximal du camion i, la variable v_{ij} est nulle pour toute solution admissible. C'est le cas, par exemple, de v_{11}, v_{12}, v_{16}, ... On pourrait donc alléger le modèle en omettant ces variables « inutiles ».

26. World News.

Le modèle comporte deux groupes de variables de décision binaires. On associe d'abord une variable binaire à chaque intersection :

$$v_T = 1 \text{ si une boîte distributrice est implantée à l'intersection } T.$$

Dans le second groupe, on retrouve, pour chacun des tronçons, une variable binaire w_{ST} prenant la valeur 1 quand les ménages vivant sur le tronçon ST ont accès à une boîte située à l'une des extrémités S ou T :

$$w_{ST} = 1 \text{ si une boîte est placée à l'une des extrémités } S \text{ ou } T.$$

L'objectif consiste à maximiser le nombre total z de ménages vivant sur les tronçons dont l'une des extrémités se verra attribuer une boîte :

$$z = 123\ w_{AB} + 46\ w_{AC} + 121\ w_{AG} + \ldots + 49\ w_{HI}.$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes. Le 1er se réduit à une inéquation limitant à 2 600 dollars les sommes consacrées à l'achat et l'implantation des boîtes dans le quartier :

$$650\ v_A + 650\ v_B + 650\ v_C + \ldots + 650\ v_J \leq 2\,600.$$

Le 2e groupe comprend 18 inéquations, une pour chacun des 18 tronçons. La contrainte associée au tronçon ST force l'attribution d'une boîte à l'une des extrémités S ou T lorsque la variable w_{ST} prend la valeur 1 :

$$w_{ST} \leq v_S + v_T.$$

Une solution optimale consiste à placer une boîte aux intersections A, B, F et I. Les 1 108 ménages vivant sur les tronçons AB, AC, AG, AJ, BC, BD, BE, BJ, DF, DI, EI, FI, FJ et HI auront alors accès à une boîte à l'une des extrémités du tronçon sur lequel ils habitent.

Autre solution. On conserve la même liste de variables, mais celles du 2e groupe sont maintenant définies de la façon suivante :

$$w_{ST} = 1 \text{ si on implante des boîtes aux deux extrémités du tronçon } ST.$$

La fonction-objectif z, qu'on cherche à maximiser, s'écrit cette fois :

$$z = 392\ v_A + 335\ v_B + \ldots + 280\ v_J - 123\ w_{AB} - 46\ w_{AC} - 121\ w_{AG} - \ldots - 49\ w_{HI},$$

où le coefficient c_T de la variable v_T est le nombre total de ménages vivant sur un tronçon dont T est une extrémité. Par exemple,

$$c_A = 102 + 123 + 46 + 121 = 392.$$

Les contraintes technologiques du 2e groupe prennent ici la forme suivante :

$$v_S + v_T \leq 1 + w_{ST}.$$

27. La maison Tapisrouge.

Le modèle comporte deux groupes de variables de décision binaires. On associe d'abord une variable binaire aux localités A, B, C, D et E :

$$v_J = 1 \text{ si un atelier de Tapisrouge est installé dans la localité } J.$$

Dans le second groupe, on retrouve 6 × 5 = 30 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$w_{IJ} = 1 \text{ si l'entretien des machines de } I \text{ est assuré par le préposé de l'atelier installé en } J,$$

où I = A, B, C, D, E, F et J = A, B, C, D, E. L'objectif est de maximiser les revenus annuels nets espérés z de Tapisrouge. Pour obtenir z, il faut d'abord calculer le nombre espéré de machines à café vendues dans chaque localité :

$$NbVentes\text{A} = 120\ w_{AA} + 120\ w_{AB} + 50\ w_{AC} + 120\ w_{AD} + 50\ w_{AE}$$

$$NbVentes\text{B} = 150\ w_{BA} + 150\ w_{BB} + 70\ w_{BC} + 70\ w_{BD} + 150\ w_{BE}$$

$NbVentes\mathrm{C} \;=\; 120\, w_{\mathrm{CA}} + 120\, w_{\mathrm{CB}} + 200\, w_{\mathrm{CC}} + 200\, w_{\mathrm{CD}} + 200\, w_{\mathrm{CE}}$

$NbVentes\mathrm{D} \;=\; 300\, w_{\mathrm{DA}} + 120\, w_{\mathrm{DB}} + 300\, w_{\mathrm{DC}} + 300\, w_{\mathrm{DD}} + 120\, w_{\mathrm{DE}}$

$NbVentes\mathrm{E} \;=\; 90\, w_{\mathrm{EA}} + 200\, w_{\mathrm{EB}} + 200\, w_{\mathrm{EC}} + 90\, w_{\mathrm{ED}} + 200\, w_{\mathrm{EE}}$

$NbVentes\mathrm{F} \;=\; 75\, w_{\mathrm{FA}} + 180\, w_{\mathrm{FB}} + 180\, w_{\mathrm{FC}} + 180\, w_{\mathrm{FD}} + 75\, w_{\mathrm{FE}}\,,$

puis le nombre total de ventes espérées :

$NbVentes\mathrm{T} = NbVentes\mathrm{A} + NbVentes\mathrm{B} + \ldots + NbVentes\mathrm{F}.$

Enfin, les revenus annuels nets espérés z, que nous exprimons en milliers de dollars, s'obtiennent comme la différence entre les revenus nets retirés de la vente des machines, qui sont de 3 000 $ par machine par année, et les coûts d'installation des ateliers, qui s'élèvent à 210 000 $ par atelier par année :

$$z \;=\; 3\, NbVentes\mathrm{T} - 210\,(v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{D}} + v_{\mathrm{E}}).$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes. Il faut qu'un atelier soit installé dans la localité J pour qu'un préposé en provenance de J puisse desservir des clients :

Atelier J $\qquad w_{\mathrm{A}J} + w_{\mathrm{B}J} + w_{\mathrm{C}J} + w_{\mathrm{D}J} + w_{\mathrm{E}J} + w_{\mathrm{F}J} \;\le\; 6\, v_J \qquad J = \mathrm{A, B, C, D, E}.$

L'entretien de toutes les machines de la localité I doit être confié à un même préposé :

Machines I $\qquad w_{I\mathrm{A}} + w_{I\mathrm{B}} + w_{I\mathrm{C}} + w_{I\mathrm{D}} + w_{I\mathrm{E}} = 1 \qquad I = \mathrm{A, B, C, D, E, F}.$

Il existe plusieurs solutions optimales. En voici une :

$v_{\mathrm{B}} = 1$ et $w_{\mathrm{BB}} = w_{\mathrm{EB}} = 1$

$v_{\mathrm{D}} = 1$ et $w_{\mathrm{AD}} = w_{\mathrm{CD}} = w_{\mathrm{DD}} = w_{\mathrm{FD}} = 1$

$z = 3\,030.$

Cette solution recommande d'installer deux ateliers, l'un en B dont le préposé desservira les clients de B et de E, l'autre en D dont le préposé assurera l'entretien des machines en A, C, D et F. Tapisrouge peut espérer retirer 3 030 000 $ par année de la vente de ses machines à café dans les six localités.

28. Les déchets dangereux.

(a) Le modèle comporte 17 variables de décision binaires, une pour chaque quartier. Elles sont définies de la façon suivante :

$$v_S = 1 \text{ si un site est implanté dans le quartier } S,$$

où S = A, B, ..., Q. L’objectif est de minimiser le nombre de sites :

$$\text{Min } z \;=\; v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{C}} + \ldots + v_{\mathrm{P}} + v_{\mathrm{Q}}.$$

Les contraintes technologiques, au nombre de 17, traduisent le principe d’accessibilité et exigent que les citoyens de tout quartier devraient trouver au moins un site d’enfouissement dans le quartier ou dans un quartier limitrophe. Les voici.

Quartier A	$v_A + v_B + v_C + v_G + v_H \geq 1$
Quartier B	$v_A + v_B + v_C + v_D + v_G \geq 1$
Quartier C	$v_A + v_B + v_C + v_D + v_E \geq 1$
Quartier D	$v_B + v_C + v_D + v_E + v_F + v_G \geq 1$
Quartier E	$v_C + v_D + v_E + v_F + v_K + v_L \geq 1$
Quartier F	$v_D + v_E + v_F + v_G + v_J + v_K \geq 1$
Quartier G	$v_A + v_B + v_D + v_F + v_G + v_H + v_I + v_J \geq 1$
Quartier H	$v_A + v_G + v_H + v_I + v_J \geq 1$
Quartier I	$v_G + v_H + v_I + v_J \geq 1$
Quartier J	$v_F + v_G + v_H + v_I + v_J + v_K + v_N + v_O \geq 1$
Quartier K	$v_E + v_F + v_J + v_K + v_L + v_M + v_N \geq 1$
Quartier L	$v_E + v_K + v_L + v_M \geq 1$
Quartier M	$v_K + v_L + v_M + v_N + v_Q \geq 1$
Quartier N	$v_J + v_K + v_M + v_N + v_O + v_P + v_Q \geq 1$
Quartier O	$v_N + v_O + v_P \geq 1$
Quartier P	$v_N + v_O + v_P + v_Q \geq 1$
Quartier Q	$v_M + v_N + v_P + v_Q \geq 1.$

Ce modèle admet une solution optimale unique :

$$v_E = v_G = v_N = 1.$$

Le principe d'accessibilité est respecté pourvu que des sites soient implantés dans les quartiers E, G et N. Et 3 est le nombre minimal de sites si l'on veut que tout citoyen puisse trouver un site dans son quartier ou dans un quartier limitrophe.

(b) Les variables de décision sont :

v_S pour S = A, B, ..., Q et $S \neq$ G et $S \neq$ N

w_S pour S = A, B, ..., Q

où

$w_S = 1$ si aucun site n'est implanté dans le quartier S ou dans un quartier limitrophe.

Cette fois, l'objectif est de minimiser le nombre z de citoyens qui ne trouveront pas de site dans leur quartier ou dans un quartier limitrophe :

$$z = 23\, w_A + 12\, w_B + 34\, w_C + \ldots + 16\, w_P + 30\, w_Q.$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes. Dans le premier, une version adaptée de l'inéquation « Quartier S » force la nouvelle variable w_S à prendre la valeur 1 quand aucun site n'est implanté dans le quartier S ou dans un quartier limitrophe. Elle s'obtient de la contrainte correspondante du modèle ***(a)*** en ajoutant un terme « + w_S ». Il faut également enlever, s'ils sont présents dans la contrainte du modèle ***(a)***, les termes impliquant les variables v_G et v_N, car ces dernières ont été retranchées du modèle ***(b)***. Par exemple,

Quartier A $\quad v_A + v_B + v_C + v_H + w_A \geq 1$

Quartier G $\quad v_A + v_B + v_D + v_F + v_H + v_I + v_J + w_G \geq 1$

Quartier J $\quad v_F + v_H + v_I + v_J + v_K + v_O + w_J \geq 1.$

Le 2e groupe, réduit à une équation, indique le le nombre de sites :

Nombre $\quad v_A + v_B + v_C + v_D + v_E + v_F + v_H + v_I + v_J + v_K + v_L + v_M + v_O + v_P + v_Q = n.$

Pour déterminer où implanter successivement les sites, on pose le second membre n de la contrainte « Nombre » égal à 1, 2, 3, ... De plus, on ajoute, à partir de $n = 2$, des équations pour forcer le choix des sites préalablement retenus.

- Pour $n = 1$, il vient $v_K = 1$ et $z = 213$: le premier site est donc installé dans le quartier K.
- On pose ensuite $n = 2$ et on ajoute la contrainte « $v_K = 1$ ». Il vient $v_B = 1$ et $z = 90$, ce qui indique de placer le 2e site en B.
- On pose maintenant $n = 3$, tout en ajoutant les contraintes « $v_K = v_B = 1$ ». Il vient $v_P = 1$ et $z = 30$. Le 3e site sera donc dans le quartier P.
- On pose enfin $n = 4$, tout en ajoutant les contraintes « $v_K = v_B = v_P = 1$ ». Il vient $z = 0$. Cette dernière version du modèle admet plusieurs solutions optimales : le 4e site peut indifféremment être installé dans l'un ou l'autre des quartiers suivants : H, I ou J.

29. Un réseau de concessionnaires d'automobiles.

Le modèle comporte deux groupes de variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$v_j = 1$ si la population de la ville j est desservie par un concessionnaire

$w_{ij} = 1$ si la population de la ville j est desservie par le concessionnaire établi en i,

où j = 1, 2, ..., 8. Comme l'importateur désire que les consommateurs soient desservis par un concessionnaire situé à 20 km ou moins de la ville où ils résident, on introduit une variable w_{ij} seulement lorsque la distance entre les villes i et j est de 20 km ou moins. Les variables de ce type dans le modèle seront donc :

$$w_{11}, w_{12}, w_{14}, w_{15}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, \ldots, w_{85}, w_{86}, w_{87}, w_{88}.$$

L'objectif consiste à maximiser le nombre total z de consommateurs (en milliers) desservis par les divers concessionnaires, où

$$z = 80\, v_1 + 40\, v_2 + \ldots + 65\, v_8.$$

Les contraintes technologiques forment trois groupes.

- Les équations du premier indiquent que la ville j, si elle est desservie, le sera par un seul concessionnaire, lequel sera nécessairement implanté dans l'une des villes situées à 20 km ou moins de j.

  Défn V1 $v_1 = w_{11} + w_{21} + w_{41} + w_{51}$

  Défn V2 $v_2 = w_{12} + w_{22} + w_{32} + w_{42} + w_{72}$

  Défn V3 $v_3 = w_{23} + w_{33} + w_{43} + w_{73}$

  Défn V4 $v_4 = w_{14} + w_{24} + w_{34} + w_{44} + w_{54} + w_{64}$

  Défn V5 $v_5 = w_{15} + w_{45} + w_{55} + w_{65} + w_{85}$

  Défn V6 $v_6 = w_{46} + w_{56} + w_{66} + w_{76} + w_{86}$

  Défn V7 $v_7 = w_{27} + w_{37} + w_{67} + w_{77} + w_{87}$

  Défn V8 $v_8 = w_{58} + w_{68} + w_{78} + w_{88}$.

- Le second comporte huit inéquations, notées « Bassin i », qui traduisent le fait que l'importateur limite le bassin de population du territoire qui serait accordé à un concessionnaire situé en i. Indiquons comment construire la première : si une concession est implantée dans la ville i, son territoire comprendra nécessairement cette ville et, par conséquent, $w_{11} = 1$; de plus, la population totale des villes desservies par ce concessionnaire ne devra pas excéder 4 fois la population de i. La contrainte « Bassin 1 » s'énonce donc ainsi :

  $$80\ w_{11} + 40\ w_{12} + 50\ w_{14} + 20\ w_{15} \leq 320\ w_{11},$$

  ce qui se récrit :

  Bassin 1 $-\ 240\ w_{11} + 40\ w_{12} + 50\ w_{14} + 20\ w_{15} \leq 0.$

  Les autres contraintes de cette catégorie s'obtiennent de façon similaire.

  Bassin 2 $80\ w_{21} - 120\ w_{22} + 60\ w_{23} + 50\ w_{24} + 45\ w_{27} \leq 0$

  Bassin 3 $40\ w_{32} - 180\ w_{33} + 50\ w_{34} + 45\ w_{37} \leq 0$

  Bassin 4 $80\ w_{41} + 40\ w_{42} + 60\ w_{43} - 150\ w_{44} + 20\ w_{45} + 30\ w_{46} \leq 0$

  Bassin 5 $80\ w_{51} + 50\ w_{54} - 60\ w_{55} + 30\ w_{56} + 65\ w_{58} \leq 0$

  Bassin 6 $50\ w_{64} + 20\ w_{65} - 90\ w_{66} + 45\ w_{67} + 65\ w_{68} \leq 0$

  Bassin 7 $40\ w_{72} + 60\ w_{73} + 30\ w_{76} - 135\ w_{77} + 65\ w_{78} \leq 0$

  Bassin 8 $20\ w_{85} + 30\ w_{86} + 45\ w_{87} - 195\ w_{88} \leq 0.$

- La dernière catégorie se réduit à une équation « Nb Concess », qui fixe le nombre de concessionnaires. L'ordre d'implantation des concessionnaires sera déterminé en posant le membre droit c égal successivement à 1, puis à 2, puis à 3, ...

  Nb Concess $w_{11} + w_{22} + w_{33} + w_{44} + w_{55} + w_{66} + w_{77} + w_{88} = c.$

L'importateur devrait implanter la 1re concession dans la ville 4 et lui attribuer un territoire regroupant 200 000 habitants, le maximum permis par la règle limitant la population du territoire desservi à 4 fois celle de la ville où est située la concession. Il y a plus d'une façon de définir le territoire de cette 1re concession : il pourrait, par exemple, être formé des villes 1, 2, 4 et 6. La 2e concession devrait être située dans la ville 7 et desservir les villes 3, 7 et 8. Enfin, la ville 5 devrait accueillir la 3e et dernière concession. Les 8 villes de la région seront alors toutes desservies par un concessionnaire situé à 20 km ou moins.

Note 1. L'énoncé indique que le territoire accordé à un concessionnaire comprend nécessairement la ville où il est implanté. Cette condition est garantie implicitement par les contraintes « Bassin i ». Considérons à titre d'exemple le cas où $i = 8$ et procédons par contradiction : si $w_{88} = 0$, alors $w_{85} = w_{86} = w_{87} = 0$ en vertu de « Bassin 8 »...

Note 2. Il serait peut-être pertinent de remanier les territoires la 3e année, sinon le concessionnaire de la ville 5 se retrouvera avec un bassin de population nettement inférieur à ceux de ses deux collègues. Noter que, selon la procédure décrite ci-dessus, les territoires sont redéfinis chaque fois qu'est changée la valeur du paramètre c. Il est possible cependant de forcer le modèle à laisser intacts les territoires accordés précédemment : il suffit, par exemple, d'éliminer certaines variables et contraintes, puis de fixer à 1 les valeurs de certaines w_{ij}. Supposons, pour illustrer notre propos, que, au moment de déterminer où situer la 2e concession, l'importateur veuille s'assurer que les décisions associées à la première ne soient pas remises en cause. Supposons, plus précisément, qu'il désire que la 1re concession soit maintenue dans la ville 4 et que son territoire continue d'être formé des villes 1, 2, 4 et 6. Il s'agirait, avant de poser $c = 2$, de modifier ainsi le modèle : d'abord, sont éliminées toutes les variables w_{ij} dont l'un ou l'autre des indices appartiennent à l'ensemble {1, 2, 4, 6}, sauf w_{41}, w_{42}, w_{44} et w_{46} qui sont conservées; les inéquations « Bassin i », où i = 1, 2, 4, 6, sont enlevées; enfin, des contraintes « Choix 1j », où j = 1, 2, 4, 6, sont ajoutées, qui traduisent mathématiquement les choix effectués la première année :

Choix 1j $\qquad w_{4j} = 1 \qquad j = 1, 2, 4, 6.$

Remarquer que, dans toute solution admissible du modèle modifié, les variables v_j, où j = 1, 2, 4, 6, prendront la valeur 1 : en effet, la contrainte « Défn Vj », se réduit, après les changements apportés, à « $v_j = w_{4j}$ »; or, « Choix 1j » fixe à 1 la valeur de w_{4j}.

Note 3. La procédure séquentielle décrite à la note précédente ne produit pas nécessairement un optimum global. Par exemple, le territoire de la 1re concession pourrait être formé des villes 2, 3, 4, 5 et 6, dont la population totale est de 200 000 habitants. Si l'on cherche à implanter une 2e concession sans toucher à ce territoire et que l'on applique la procédure de la note 2, une solution optimale résultante est : $w_{44} = w_{77} = 1$ et $z = 310$, ce qui est inférieur à la valeur maximale 370 obtenue quand on pose $c = 2$ et que l'on utilise le modèle non modifié.

30. L'agence Axe

Le modèle comporte deux groupes de variables de décision. Le premier est constitué de variables entières qui indiquent combien de fois l'agence recourra aux divers médiums :

x_j = nombre de recours au médium numéro j lors de la campagne de publicité

où j = 0, 1, ..., 9. Les variables du second sont associées à la décision de recourir ou non à un type de médiums donné :

$v_h = 1$ si on a recours aux médiums de type h lors de la campagne de publicité

où h = 0(tv, 15 sec.), 1(tv, 30 sec.), 67(radio, 15 ou 30 sec.). L'objectif, tel que mentionné dans l'énoncé, est atteindre le plus grand nombre possible de visiteurs potentiels :

$$\text{Max } z = 10\,000\,x_0 + 12\,000\,x_1 + 8\,500\,x_2 + \ldots + 100\,x_8 + 50\,x_9.$$

Voici les contraintes technologiques de ce modèle linéaire.

Max 0	$x_0 \leq 10\,v_0$
Max 1	$x_1 \leq 10\,v_1$
Max 2	$x_2 \leq 5$
Max 3	$x_3 \leq 5$
Max 4	$x_4 \leq 3$
Max 5	$x_5 \leq 3$
Max 6	$x_6 \leq 25$
Max 7	$x_7 \leq 20$
Max 8	$x_8 \leq 1\,000$
Max 9	$x_9 \leq 5\,000$
Budget	$1\,800\,x_0 + 2\,500\,x_1 + 3\,000\,x_2 + \ldots + 325\,x_7 + 3\,x_8 + 1\,x_9 \leq 61\,500$
Min\$ 89	$3\,x_8 + 1\,x_9 \geq 5\,000$
Min 0	$x_0 \geq 5\,v_0$
Min 1	$x_1 \geq 6\,v_1$
Min Radio	$x_6 + x_7 - 20\,v_{67} \geq 0$
Max Radio	$x_6 + x_7 - 45\,v_{67} \leq 0$
Radio-TV	$1\,800\,x_0 + 2\,500\,x_1 + 250\,x_6 + 325\,x_7 \geq 10\,000$
Journaux	$3\,000\,x_2 + 4\,000\,x_3 + 1\,400\,x_4 + 1\,800\,x_5 \geq 9\,000$

Une solution optimale donne :

$x_0 = 10$ et $x_1 = 8$ et $x_2 = 3$

$x_7 = 20$ et $x_8 = 1\,000$ et $x_9 = 5\,000$

$v_0 = v_1 = v_{67} = 1$

$z = 603\,500$ (visiteurs potentiels).

31. Rachat de l'usine d'un concurrent

(a) Le modèle comporte quatre groupes de variables de décision, trois pour chacun des trois types d'appareils et un 4e associé au temps durant lequel opérera l'usine :

x_{CJ} = nombre de cuisinières fabriquées dans l'usine J

x_{RJ} = nombre de réfrigérateurs fabriqués dans l'usine J

x_{LJ} = nombre de laveuses fabriquées dans l'usine J

y_J = nombre d'heures de fonctionnement de l'usine J,

où J = A, B. L'objectif est évidemment de minimiser les coûts de production :

$$\text{Min } z = 350\, y_A + 300\, y_B.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories.

- Il faut d'abord répondre aux commandes :
  Commande C $\quad x_{CA} + x_{CB} \geq 1\,000$

  Commande R $\quad x_{RA} + x_{RB} \geq 500$

  Commande L $\quad x_{LA} + x_{LB} \geq 1\,200.$
- Le temps de production dans une usine ne peut excéder le temps disponible :
  Disp A $\quad y_A \leq 1\,900$

  Disp B $\quad y_B \leq 4\,200.$
- Enfin, il, faut expliciter dans le modèle les liens logiques entre les variables donnant le nombre d'appareils produits et celles exprimant le temps de production :
  Défn YA $\quad y_A = 2\, x_{CA} + 4\, x_{RA} + 3\, x_{LA}$

  Défn YB $\quad y_B = 4\, x_{CB} + 3\, x_{RB} + 2\, x_{LB}.$

Une solution optimale donne :

$x_{CA} = 950 \quad y_A = 1\,900$

$x_{CB} = 50 \quad x_{RB} = 500 \quad x_{LB} = 1\,200 \quad y_B = 4\,100$

$z = 1\,895\,000$ (dollars).

(b) Une façon élégante de répondre à la question posée est d'ajouter au modèle précédent les variables et contraintes suivantes. On définit d'abord six nouvelles variables binaires :

$$v_{IJ} = 1 \quad \text{si on produit des appareils de type } I \text{ dans l'usine } J$$

où I = C, R, L et J = A, B. Voici les contraintes à adjoindre au modèle utilisé en réponse à la question (a) :

Choix C $\quad v_{CA} + v_{CB} = 1$

Choix R $\quad v_{RA} + v_{RB} = 1$

Choix L $\quad v_{LA} + v_{LB} = 1$

$x_{CJ} \geq 1000\, v_{CJ}$ $\qquad J$ = A, B

$x_{RJ} \geq 500\, v_{RJ}$ $\qquad J$ = A, B

$x_{LJ} \geq 1200\, v_{LJ}$ $\qquad J$ = A, B

$v_{IJ} = 0$ ou 1 $\qquad I$ = C, R, L et J = A, B.

Ce modèle n'admet aucune solution admissible. Il s'avère donc impossible d'utiliser une seule usine pour chacun des produits.

(c) On ajoute au modèle utilisé en réponse à la question (b) les deux variables de décision suivantes :

s_J = nombre d'heures supplémentaires de production ajoutées à la capacité de l'usine J.

La fonction-objectif devient :

$$z = 350\, y_A + 300\, y_B + 100\, s_A + 100\, s_B.$$

Il faut de plus adapter les contraintes « DISP J » au nouveau contexte :

Disp A $\qquad y_A \leq 1\,900 + s_A$

Disp B $\qquad y_B \leq 4\,200 + s_B$.

Une solution optimale donne :

$v_{CA} = 1 \quad x_{CA} = 1\,000 \quad y_A = 2\,000 \quad s_A = 100$

$v_{RB} = 1 \quad x_{RB} = 500 \quad v_{LB} = 1 \quad x_{LB} = 1\,200 \quad y_B = 3\,900$

$z = 1\,880\,000$ (dollars).

32. L'impartition des colis chez Transport Albert

(a) Le modèle comporte 20 variables de décision, une pour chacune des routes suggérées par le logiciel et retenues par Margaret :

$$v_j = 1 \text{ si la route numéro } j \text{ est retenue par Margaret}$$

où $j = 1, ..., 20$. L'objectif consiste à minimiser le nombre de routes retenues, c'est-à-dire la somme des variables binaires v_j :

$$\text{Min } z = v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}.$$

Les contraintes technologiques, au nombre de 10, exigent que chaque colis appartienne à une et une seule route :

Colis 0 $\qquad v_1 + v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + v_9 + v_{13} + v_{16} + v_{20} = 1$

Colis 1 $\qquad v_1 + v_3 + v_6 + v_{16} + v_{19} + v_{20} = 1$

Colis 2 $\qquad v_2 + v_4 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{17} + v_{18} = 1$

Colis 3 $\qquad v_2 + v_{10} + v_{11} + v_{14} + v_{15} + v_{16} = 1$

Colis 4 $v_3 + v_5 + v_7 + v_8 + v_{12} + v_{17} + v_{18} + v_{19} = 1$

Colis 5 $v_1 + v_4 + v_{12} + v_{13} + v_{19} + v_{20} = 1$

Colis 6 $v_2 + v_3 + v_5 + v_7 + v_{12} + v_{14} + v_{18} = 1$

Colis 7 $v_5 + v_9 + v_{10} + v_{19} + v_{20} = 1$

Colis 8 $v_2 + v_4 + v_8 + v_{10} + v_{11} + v_{15} + v_{16} + v_{17} = 1$

Colis 9 $v_6 + v_7 + v_9 + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{19} = 1.$

Une solution optimale consiste à retenir les routes 2 et 19.

(b) Il suffit de modifier la fonction-objectif :

$$z = 6\,v_1 + 9{,}5\,v_2 + 7\,v_3 + \dots + 6\,v_{20}.$$

Une solution optimale consiste à retenir les routes 15, 18 et 20. La durée espérée des livraisons s'élève alors à 17,5 heures.

(c) Il suffit d'ajouter la contrainte suivante :

Priorité $v_4 + v_9 + v_{10} = 1.$

Une solution optimale consiste à retenir les routes 6, 10 et 12. La durée espérée des livraisons s'élève alors à 19 heures.

Note. La contrainte « Colis 2 » est redondante en présence de « Priorité » et pourrait être enlevée. On pourrait également remplacer la contrainte « Priorité » par « $v_2 = v_{11} = v_{17} = v_{18} = 0$ », ou mieux encore éliminer ces quatre variables du modèle.

(d) On introduit une variable non négative y :

$$y = \text{durée espérée de la route la plus longue.}$$

L'objectif est ici tout simplement de minimiser $z = y$. Les contraintes technologiques sont les 10 équations « Colis *i* » et les 20 inéquations « Lien *j* » qui exigent que y soit une borne supérieure de la durée espérée de chaque route j. Voici, à titre d'exemples, les contraintes « Lien 01 » et « Lien 02 » :

$$y \geq 6\,v_1 \quad \text{et} \quad y \geq 9{,}5\,v_2.$$

Une solution optimale consiste à retenir les routes 7, 11 et 20. La durée espérée de la route la plus longue est de 6 heures.

33. La Maisonnée

(a) Voici les variables de décision de notre modèle :

x_J = nombre de maisons du modèle J fabriquées

p_J = nombre de maisons du modèle J en pénurie

y = nombre d'ouvriers au service de La Maisonnée au cours de l'an prochain

y_D = nombre d'ouvriers à débaucher au début de l'an prochain

y_E = nombre d'ouvriers à embaucher au début de l'an prochain

s = nombre d'heures supplémentaires à répartir entre les ouvriers au cours de l'an prochain.

On introduit également une constante C pour tenir compte des coûts incompressibles de publicité, de vente et d'entretien de l'usine.

L'objectif consiste à maximiser le revenu net et s'écrit :

$$\text{Max } z = Ventes - CoûtF - CoûtP - CoûtT - C$$

où

$Ventes = 52\,300\, x_A + 77\,180\, x_B + 92\,295\, x_C$

$CoûtF = 20\,000\, x_A + 40\,000\, x_B + 30\,000\, x_C$

$CoûtP = 2\,000\,(p_A + p_B + p_C)$

$CoûtT = 51\,450\, y + 5\,000\, y_D + 1\,500\, y_E + 53\, s.$

Les contraintes technologiques sont :

Disp Temps	$490\, x_A + 588\, x_B + 637\, x_C \leq 1470\, y + s$
Demande A	$x_A + p_A = 38$
Demande B	$x_B + p_B = 28$
Demande C	$x_C + p_C = 31$
Max Suppl	$s \leq 100\, y$
Défn Y	$y = 40 - y_D + y_E$
Défn C	$C = 175\,000.$

Toutes les variables sont non négatives et entières, à l'exception de s qui n'est pas requise d'être entière.

Voici une solution optimale qui assure un revenu net de 2 082 562 dollars :

$x_A = 38$	$x_B = 28$	$x_C = 31$	$p_A = p_B = p_C = 0$
$y = 37$	$y_D = 3$	$y_E = 0$	$s = 441.$

(b) On ajoute une variable entière x_D et une variable binaire v_D. La nouvelle fonction-objectif s'obtient en ajoutant le terme « + 108 500 x_D » aux ventes, ainsi que le terme « + 35 000 x_D » aux coûts de fabrication. Les contraintes technologiques sont celles de la question (a), à deux exceptions près.

- Le membre gauche de l'inéquation « Disp Temps » comprend un terme additionnel :

  Disp Temps $\quad 490\, x_A + 588\, x_B + 637\, x_C + 900\, x_D \leq 1470\, y + s.$

- On ajoute l'inéquation double suivante pour lier les variables x_D et v_D :

$$5\ v_D \le x_D \le 20\ v_D.$$

Dans ce nouveau contexte, le revenu net augmenterait à 2 917 582 dollars. Voici une solution optimale qui permet d'atteindre cette somme :

$x_A = 38$ $x_B = 28$ $x_C = 31$ $p_A = p_B = p_C = 0$

$v_D = 1$ $x_D = 20$

$y = 49$ $y_D = 0$ $y_E = 9$ $s = 801.$

34. La bonnetterie

Voici les variables de décision de notre modèle :

t_j = nombre de tricots Tj fabriqués au cours du mois

$w_j = 1$ si $t_j \neq 0$

y_h = nombre d'heures que le contractuel passera dans l'atelier h au cours du mois

$v = 1$ si les services du contractuel sont retenus.

où $j = 1, 2, 3, 4$ et $h = 1, 4$. L'objectif consiste à maximiser le profit et s'écrit :

$$\text{Max}\ \ z = 25\ t_1 + 20\ t_2 + 18\ t_3 + 45\ t_4 - 1000\ v - 500\ w_3.$$

Les contraintes technologiques sont :

Atelier 1	$0{,}9\ t_1 + t_2 + 0{,}6\ t_3 + 0{,}3\ t_4 \le 800 + y_1$	
Atelier 2	$0{,}7\ t_1 + 0{,}8\ t_2 + 1{,}2\ t_3 + 0{,}5\ t_4 \le 700$	
Atelier 3	$t_1 + 0{,}5\ t_2 + 0{,}5\ t_3 + 1{,}5\ t_4 \le 650$	
Atelier 4	$0{,}3\ t_1 + 0{,}2\ t_2 + 0{,}5\ t_3 + 0{,}4\ t_4 \le 700 + y_4$	
Contractuel	$y_1 + y_4 \le 176\ v$	
Lien *tw-j*	$w_j \le t_j \le 1000\ w_j$	$j = 1, 2, 3, 4$
T2 si T1	$w_1 \le w_2$	
T3 ou T4	$w_3 + w_4 \le 1$	
Min T4	$t_4 \ge 275\ w_4.$	

Le profit maximal est de 21 875 dollars et s'obtient en implantant le plan optimal suivant :

$w_2 = w_4 = 1$ $t_2 = 475$ $t_4 = 275.$

Note. La dernière contrainte, « Min T4 », peut être intégrée dans la contrainte « Lien *tw*-4 » en récrivant celle-ci sous la forme :

Lien *tw*-4 $275\ w_4 \le t_4 \le 1000\ w_4.$

35. Le marchand de primeurs

(a) Le coefficient c_{xj} de x_j est le prix de vente d'un lot du produit j (soit le prix de vente d'une unité multiplié par le nombre d'unités dans un lot), auquel on soustrait le prix d'achat du lot. Par exemple,

$$c_{x2} = (40 \times 2{,}50) - 58 = 42.$$

Le coefficient c_{sj} de s_j correspond à une perte égale au prix de vente d'une unité du produit j. Par exemple, $c_{s2} = 2{,}50$.

(b) Le membre droit de « VENTES 2 » représente la demande pendant la période de 4 jours considérée et est égal à $4 \times 980 = 3\,920$.

(c) La demande du produit 2 pendant la période de 4 jours considérée est égale à 3 920 unités, soit 98 lots :

$$(4 \times 980) / 40 \;=\; 3\,920 / 40 \;=\; 98.$$

La demande en ananas durant la même période correspond à $4 \times 390 / 50 = 31{,}2$ lots. L'acheteur achètera donc un maximum de 32 lots, et la contrainte « ACHATS 1 » prend la forme suivante :

ACHATS 1 $\quad x_1 \leq 32\, v_1.$

(d) Considérons une solution admissible $\boldsymbol{x}$ telle que

$$x_j = 0 \quad \text{et} \quad v_j \neq 0.$$

On obtient une autre solution admissible $\boldsymbol{x}'$ en annulant v_j et en laissant inchangées les valeurs des autres variables. Or, cette nouvelle solution $\boldsymbol{x}'$ est plus intéressante pour le marchand puisque le coefficient de v_j dans la fonction-objectif est négatif : de fait

$$z' \;=\; z + 15.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{x}$ ne peut être optimale, de sorte que, à l'optimum, la variable v_j est nécessairement nulle si x_j l'est.

Note. Voici le détail de la portion *Lots* de la fonction-objectif :

$$Lots = 75\, x_1 + 42\, x_2 + 22\, x_3 + 21\, x_4 + 2\, x_5 + 6\, x_6 + 8\, x_7.$$

Et voici la liste complète des contraintes technologiques du modèle :

FRAIS EXPL	$C = 2\,000$
CHARGE MAX	$1{,}5\, x_1 + 0{,}24\, x_2 + 0{,}5\, x_3 + \ldots + 0{,}2\, x_7 - 30\, y_C \leq 0$
ACHATS 1	$x_1 - 32\, v_1 \leq 0$
ACHATS 2	$x_2 - 98\, v_2 \leq 0$
ACHATS 3	$x_3 - 72\, v_3 \leq 0$
ACHATS 4	$x_4 - 88\, v_4 \leq 0$
ACHATS 5	$x_5 - 168\, v_5 \leq 0$
ACHATS 6	$x_6 - 76\, v_6 \leq 0$
ACHATS 7	$x_7 - 85\, v_7 \leq 0$

VENTES 1 $50\,x_1 + p_1 - s_1 = 1\,560$

VENTES 2 $40\,x_2 + p_2 - s_2 = 3\,920$

VENTES 3 $275\,x_3 + p_3 - s_3 = 19\,680$

VENTES 4 $30\,x_4 + p_4 - s_4 = 2\,640$

VENTES 5 $50\,x_5 + p_5 - s_5 = 8\,400$

VENTES 6 $40\,x_6 + p_6 - s_6 = 3\,040$

VENTES 7 $25\,x_7 + p_7 - s_7 = 2\,120$.

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale, qui exige 10 charges et rapporte au marchand un bénéfice net de 5 148,75 $.

Produit	1	2	3	4	5	6	7
v_j	1	1	1	1	1	1	1
x_j	31	98	72	88	168	76	85
p_j	10	–	–	–	–	–	–
s_j	–	–	120	–	–	–	5

36. Les modèles réduits de Mercedes

Le modèle comporte trois groupes de variables de décision. Les deux premiers sont associés à la production durant la période de 4 semaines considérée et comprennent chacun 2 × 4 = 8 variables définies de la façon suivante :

$v_{Ij} = 1$ si la chaîne I est mise en route au cours de la semaine j

x_{Ij} = nombre de mini-Mercedes montées sur la chaîne I au cours de la semaine j,

où I = A, B et j = 1, 2, 3, 4. Les variables du 3^{e} et dernier groupe indiquent combien de modèles réduits seront entreposés chaque semaine :

y_j = nombre de mini-Mercedes en entrepôt au cours de la semaine j,

où cette fois j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. L'objectif consiste à minimiser le total z des coûts fixes et des frais variables de production, des coûts d'entreposage et du manque à gagner lié aux véhicules qui seront soldés en Californie :

$$z = CoûtF + CoûtV + CoûtE + CoûtI$$

où

$$CoûtF = 1\,800\,(v_{A1} + v_{A2} + v_{A3} + v_{A4}) + 4\,000\,(v_{B1} + v_{B2} + v_{B3} + v_{B4})$$

$$CoûtV = 800\,(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 825\,(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$$

$$CoûtE = 30\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$$CoûtI = 260\,y_6.$$

Les variables x_{Ij} et y_j sont entières et non négatives; les variables v_{Ij} sont restreintes aux valeurs 0 et 1. Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories.

- Les équations « Défn Y*j* » déterminent combien de mini-Mercedes resteront en entrepôt au cours de chacune des semaines :

  DÉFN Y1 $y_1 = 7$

  DÉFN Y2 $y_2 = x_{A1} + x_{B1} + y_1 - 6$

  DÉFN Y3 $y_3 = x_{A2} + x_{B2} + y_2 - 40$

  DÉFN Y4 $y_4 = x_{A3} + x_{B3} + y_3 - 18$

  DÉFN Y5 $y_5 = x_{A4} + x_{B4} + y_4 - 31$

  DÉFN Y6 $y_6 = y_5 - 5$.

- La production de la semaine *j* est disponible pour livraison seulement au début de la semaine *j* + 2 : par conséquent, les véhicules montés durant la semaine *j* doivent rester entreposés pendant la semaine *j* + 1 :

  DÉLAI *j* $y_{j+1} \geq x_{Aj} + x_{Bj}$ $j = 1, 2, 3, 4.$

- La 3e catégorie est formée de 8 groupes de 2 inéquations, nommées « Min X*Ij* » et « Max X*Ij* », où *I* = A, B et *j* = 1, 2, 3, 4. Les contraintes « Min XA*j* » et « Max XA*j* » forcent le lot qui éventuellement sera produit sur la chaîne A au cours de la semaine *j* à respecter la fourchette de 12 à 16 véhicules indiquée dans l'énoncé :

  $12\, v_{Aj} \leq x_{Aj} \leq 16\, v_{Aj}$ $j = 1, 2, 3, 4.$

  De même, le groupe « Min XB*j* » et « Max XB*j* » force de même un éventuel lot sur la chaîne B à respecter les bornes minimale et maximale données dans l'énoncé:

  $22\, v_{Bj} \leq x_{Bj} \leq 28\, v_{Bj}$ $j = 1, 2, 3, 4.$

Le tableau ci-dessous décrit un plan optimal, dont le coût est de 92 215 $. Aucune mini-Mercedes ne sera soldée en Californie.

Semaine *j*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
v_{Aj}	1	1	1	0	–	–
x_{Aj}	16	16	14	–	–	–
v_{Bj}	1	0	1	0	–	–
x_{Bj}	25	–	22	–	–	–
y_j	7	42	18	36	5	0

37. La production de l'agent X chez Blanchex

Le modèle comporte quatre groupes de variables de décision définies de la façon suivante :

v_j = 1 si une rafale est lancée le mois j

x_j = nombre de tonnes produites au cours du mois j

y_j = nombre de tonnes importées de la filiale norvégienne au cours du mois j

s_j = nombre de tonnes en stock à la fin du mois j,

où $j = 1, 2, 3, 4$. L'objectif consiste à minimiser le total z des coûts de production, d'entreposage et de pénurie, où

$$z = 17\,000 \, \Sigma \, v_j + 120 \, \Sigma \, x_j + 300 \, \Sigma \, y_j + 200 \, \Sigma \, s_j.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories.

- L'équation « Défn S*j* » détermine la quantité s_j d'Agent X en stock à la fin du mois *j*. Le tableau ci-dessous indique de façon détaillée comment sont calculées les valeurs des variables s_j.

Mois	En stock au début du mois	Fabriqué ou importé de Norvège	Vendu au cours du mois	En stock à la fin du mois
1	0	$x_1 + y_1$	100	$s_1 = x_1 + y_1 - 100$
2	s_1	$x_2 + y_2$	140	$s_2 = s_1 + x_2 + y_2 - 140$
3	s_2	$x_3 + y_3$	150	$s_3 = s_2 + x_3 + y_3 - 150$
4	s_3	$x_4 + y_4$	50	$s_4 = s_3 + x_4 + y_4 - 50$

Défn S1 $x_1 + y_1 - s_1 = 100$

Défn S2 $x_2 + y_2 + s_1 - s_2 = 140$

Défn S3 $x_3 + y_3 + s_2 - s_3 = 150$

Défn S4 $x_4 + y_4 + s_3 - s_4 = 50.$

- La seconde catégorie est formée de 4 groupes de deux inéquations, nommées « Min Raf*j* » et « Max Raf*j* », où $j = 1, 2, 3, 4$. Le groupe associé à la semaine *j* force la rafale du mois *j*, si elle est lancée, à respecter la fourchette de 225 à 300 tonnes indiquée dans l'énoncé :

$$225 \, v_j \leq x_j \leq 300 \, v_j.$$

Une solution optimale, dont le coût est de 125 500 $, recommande de lancer le mois 2 une rafale de taille minimale et d'importer de Norvège les 215 tonnes manquantes :

$v_2 = 1$ $x_2 = 225$

$y_1 = 100$ $y_3 = 65$ $y_4 = 50$

$s_2 = 85.$

38. L'affectation des capitaux

(a) Le modèle comporte 6 × 7 = 42 variables de décision définies de la façon suivante :

x_{ij} = somme prêtée (en 000 $) par le rentier R*j* au client demandant l'hypothèque H*i*,

où i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 et j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. L'objectif est de minimiser le total z des frais financiers, lequel total z sera exprimé en milliers de dollars et se calcule ainsi :

$$z = 0{,}10\ x_{11} + 0{,}11\ x_{12} + 0{,}12\ x_{13} + 0{,}13\ x_{14} + \ldots + 0{,}13\ x_{65} + 0{,}12\ x_{66} + 0{,}12\ x_{67}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories.

- L'équation « Client *i* » indique que, conformément à la promesse du notaire, le client demandant l'hypothèque H*i* se verra offrir au total le montant qu'il réclame : par exemple,

  Client 1 $\qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 40.$

- L'inéquation « Rentier *j* » limite le total des hypothèques consenties par le rentier R*j* à la somme dont il dispose. Par exemple,

  Rentier 1 $\qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} \leq 45.$

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont les frais financiers sont de 50 100 dollars. Les montants des prêts sont donnés en milliers de dollars, pour alléger la présentation.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	**Total**
H1	40	–	–	–	–	–	–	40
H2	5	–	–	–	55	–	–	60
H3	–	–	–	80	–	–	–	80
H4	–	90	–	–	–	–	–	90
H5	–	10	90	–	–	–	–	100
H6	–	–	–	100	–	20	–	120
Total	45	100	90	180	55	20	0	490

(b) On prend le même modèle qu'en (a), sauf que, cette fois, l'objectif est de maximiser la fonction z. Une solution optimale, dont les frais financiers s'élèvent à 63 450 $, est décrite au tableau suivant. À nouveau, les montants des prêts sont donnés en milliers de dollars, pour alléger la présentation.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	**Total**
H1	–	–	–	15	–	–	25	40
H2	–	–	–	60	–	–	–	60
H3	–	80	–	–	–	–	–	80
H4	–	–	–	–	–	90	–	90
H5	45	–	–	–	40	–	15	100
H6	–	–	–	–	120	–	–	120
Total	45	80	0	75	160	90	40	490

(c) On reprend le modèle (a), mais on ajoute des variables de décision binaires définies ainsi :

$v_{it} = 1$ si le taux unique de l'hypothèque H*i* est le taux *t*,

où $i = 1, ..., 6$ et t = a(10%), b(11%), c(12%), d(13%), e(14%). On ajoute également deux groupes de contraintes :

- L'équation « Taux H*i* » oblige de choisir un taux unique pour l'hypothèque H*i*. Par exemple,

  Taux H1 $v_{1a} + v_{1b} + v_{1c} + v_{1d} + v_{1e} = 1$

  Taux H6 $v_{6a} + v_{6c} + v_{6d} = 1.$

- Les contraintes « H*i* et T=*t* », où $i = 1, 2, ..., 6$ et *t* est l'un des taux proposés pour l'hypothèque H*i*, relient les variables v_{it} et x_{ij} et garantissent que tous les prêts consentis au client demandant l'hypothèque H*i* sont au taux unique qui a été choisi. Voici celles qui réfèrent à H6 :

  H6 et T=a $x_{64} \leq 120\, v_{6a}$

  H6 et T=c $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{66} + x_{67} \leq 120\, v_{6c}$

  H6 et T=d $x_{65} \leq 120\, v_{6d}$.

  Ces 3 inéquations forcent la somme prêtée x_{6j} à être nulle dès que le rentier R*j* exige un taux autre que celui retenu pour H6. Supposons, à titre d'illustration, que le taux de H6 soit de 12 % ; alors, $v_{6c} = 1$ et, d'après la contrainte « Taux H6 », $v_{6a} = v_{6d} = 0$; il résulte donc des 3 inéquations ci-dessus que $x_{64} = x_{65} = 0$ et que les 120 000 $ de H6 seront prêtés par les rentiers R1, R2, R3, R6 et R7, qui tous exigent 12 %.

Une solution optimale donne : $v_{1a} = v_{2b} = v_{3c} = v_{4a} = v_{5a} = v_{6a} = 1$ et $z = 51\,200$. Les prêts correspondant à cette solution sont décrits au tableau suivant, où, comme précédemment et pour la même raison, les montants sont exprimés en milliers de dollars.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	**Total**
H1	40	–	–	–	–	–	–	40
H2	–	–	–	–	60	–	–	60
H3	5	–	–	–	75	–	–	80
H4	–	90	–	–	–	–	–	90
H5	–	–	90	10	–	–	–	100
H6	–	–	–	120	–	–	–	120
Total	45	90	90	130	135	0	0	490

(d) On reprend le modèle (a) et on introduit une variable de décision supplémentaire y définie ainsi :

y = taux d'intérêt global pour les six hypothèques.

On ajoute enfin les contraintes suivantes :

Inter H1 $10\,x_{11} + 11\,x_{12} + 12\,x_{13} + 13\,x_{14} + 11\,x_{15} + 13\,x_{16} + 14\,x_{17} = 4\,000\,y$

Inter H2 $11\,x_{21} + 12\,x_{22} + 13\,x_{23} + 13\,x_{24} + 11\,x_{25} + 13\,x_{26} + 12\,x_{27} = 6\,000\,y$

Inter H3 $12\,x_{31} + 14\,x_{32} + 13\,x_{33} + 10\,x_{34} + 12\,x_{35} + 13\,x_{36} + 13\,x_{37} = 8\,000\,y$

Inter H4 $11\,x_{41} + 10\,x_{42} + 11\,x_{43} + 11\,x_{44} + 11\,x_{45} + 12\,x_{46} + 12\,x_{47} = 9\,000\,y$

Inter H5 $13\,x_{51} + 11\,x_{52} + 10\,x_{53} + 10\,x_{54} + 12\,x_{55} + 11\,x_{56} + 13\,x_{57} = 10\,000\,y$

Inter H6 $12\,x_{61} + 12\,x_{62} + 12\,x_{63} + 10\,x_{64} + 13\,x_{65} + 12\,x_{66} + 12\,x_{67} = 12\,000\,y$.

Une solution optimale donne : $y = 0{,}11$ et $z = 53\,900$. Les prêts correspondant à cette solution sont décrits au tableau suivant, où, à nouveau, les montants sont exprimés en milliers de dollars.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	**Total**
H1	–	–	–	–	40,0	–	–	40
H2	45	–	–	–	15,0	–	–	60
H3	–	–	–	40	40,0	–	–	80
H4	–	–	–	80	10,0	–	–	90
H5	–	85	7,5	–	7,5	–	–	100
H6	–	60	–	60	–	–	–	120
Total	45	140	7,5	180	112,5	0	0	490

(e) On reprend le modèle (a) et on introduit des variables de décision w_{ij} ainsi définies :

$$w_{ij} = 1 \text{ si les fonds du rentier R}j \text{ sont proposés pour l'hypothèque H}i.$$

On ajoute également les contraintes suivantes :

$$w_{i1} + w_{i2} + w_{i3} + w_{i4} + w_{i5} + w_{i6} + w_{i7} = 1 \qquad i = 1, 2, ..., 6$$

$$x_{ij} \leq 120\, w_{ij} \qquad i = 1, 2, ..., 6 \text{ et } j = 1, 2, ..., 7.$$

Dans ce contexte, les frais financiers minimaux sont de 52 000 $. Le tableau suivant indique quel rentier consentira chacune des hypothèques.

	H1	H2	H3	H4	H5	H6
Rentier	R1	R5	R4	R2	R4	R6
Montant (en 000$)	40	60	80	90	100	120

39. Les heures supplémentaires

(a) Le modèle comporte 3 variables de décision définies de la façon suivante :

$$x_i = \text{nombre d'unités du produit P}i \text{ fabriquées,}$$

où $i = 1, 2, 3$. L'objectif est de maximiser le profit z_a :

$$z_a = 4\, x_1 + 3\, x_2 + 6\, x_3.$$

Voici les contraintes technologiques, qui sont au nombre de trois :

Atelier 1 $\quad 2\, x_1 + x_2 + 2\, x_3 \leq 900$

Atelier 2 $\quad x_1 + x_2 + 2{,}5\, x_3 \leq 300$

Atelier 3 $\quad x_1 + x_2 + 1{,}5\, x_3 \leq 1200.$

Le profit maximal est 1 200 dollars. Pour atteindre cette somme, il suffit de fabriquer 300 unités de P1, et aucune unité des deux autres produits.

(b) On reprend le modèle (a) et on introduit quatre variables de décision ainsi définies :

a_j = nombre d'heures ajoutées dans l'atelier j

d_j = nombre d'heures de l'atelier j consacrées à une autre activité,

où $j = 2, 3$. Le modèle modifié s'écrit :

Max $z_b = z_a - 2\, a_2 + d_2 - a_3 + 0{,}75\, d_3$

sous les contraintes technologiques suivantes :

Atelier 1 $\quad 2\, x_1 + x_2 + 2\, x_3 \leq 900$

Atelier 2 $x_1 + x_2 + 2,5\, x_3 \leq\; 300 + a_2 - d_2$

Atelier 3 $x_1 + x_2 + 1,5\, x_3 \leq 1200 + a_3 - d_3$.

Le profit maximal augmente à 2 062,50 dollars. Pour atteindre cette somme, on fabriquera 450 unités de P1, et aucune unité des deux autres produits :

$x_1 = 450$ $a_2 = 150$ $d_3 = 750$.

(c) On reprend le modèle (a) et on introduit deux groupes de 2 × 4 = 8 variables de décision binaires ainsi définies :

$v_{jk} = 1$ si on fait l'ajout de k lots à l'atelier j

$w_{jk} = 1$ si on dérive k lots de l'atelier j,

où $j = 2, 3$ et $k = 1, 2, 3, 4$. L'objectif consite à maximiser:

$$z_c = z_a - CAjouts + PDériv$$

où

$CAjouts = 20\, v_{21} + 35\, v_{22} + 48\, v_{23} + 60\, v_{24} + 10\, v_{31} + 18\, v_{32} + 27\, v_{33} + 36\, v_{34}$

$PDériv = 10\, w_{21} + 17\, w_{22} + 25\, w_{23} + 33\, w_{24} + 7,5\, w_{31} + 14\, w_{32} + 20\, w_{33} + 25\, w_{34}$.

Voici les contraintes technologiques du modèle modifié :

Atelier 1 $2\, x_1 + x_2 + 2\, x_3 \leq 900$

Atelier 2 $x_1 + x_2 + 2,5\, x_3 \leq\; 300 + 10\, v_{21} + 20\, v_{22} + 30\, v_{23} + 40\, v_{24} - 10\, w_{21} - \ldots - 40\, w_{24}$

Atelier 3 $x_1 + x_2 + 1,5\, x_3 \leq 1200 + 10\, v_{31} + 20\, v_{32} + 30\, v_{33} + 40\, v_{34} - 10\, w_{31} - \ldots - 40\, w_{34}$

Choix 2 $v_{21} + v_{22} + v_{23} + v_{24} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} \leq 1$

Choix 3 $v_{31} + v_{32} + v_{33} + v_{34} + w_{31} + w_{32} + w_{33} + w_{34} \leq 1$.

Le profit maximal s'établit cette fois à 1 325 dollars. Pour atteindre cette somme, on fabriquera 450 unités de P1, et aucune unité des deux autres produits:

$x_1 = 340$ $v_{24} = 1$ $w_{34} = 1$.

40. Les roues de bicyclettes

(a) Le modèle comporte deux groupes de variables de décision. Le premier, formé de variables binaires, servira à déterminer quels sites seront retenus :

$$v_i = 1 \text{ si le site } i \text{ est retenu pour y ériger une usine,}$$

où $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Les variables du second indiquent les quantités qui seront expédiées et sont définies de la façon suivante :

$$x_{iJ} = \text{nombre de roues expédiées annuellement de l'usine } i \text{ au client } J,$$

où $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $J = A, B, C, D$. L'objectif consiste à minimiser le total des coûts de transport, des coûts de production et des frais annuels d'exploitation et d'amortissement :

$$\text{Min } z = FraisA + Tr\&Prod,$$

où

$$FraisA = 250\,000\, v_1 + 135\,000\, v_2 + \ldots + 220\,000\, v_6$$

$$Tr\&Prod = (0{,}5{+}2)\, x_{1A} + (0{,}4{+}2{,}25)\, x_{2A} + (0{,}9{+}1{,}85)\, x_{3A} + \ldots + (0{,}2{+}1{,}9)\, x_{6D}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en deux catégories.

- L'inéquation « Usine i » exige que la quantité totale expédiée à partir de l'usine du site i soit nulle si le site n'est pas retenu, et n'excède pas la capacité de l'usine dans le cas contraire :

  Usine 1 $\quad x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 15\,000\, v_1$

  Usine 2 $\quad x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 10\,000\, v_2$

  Usine 3 $\quad x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 22\,000\, v_3$

  Usine 4 $\quad x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} + x_{4D} \leq 32\,000\, v_4$

  Usine 5 $\quad x_{5A} + x_{5B} + x_{5C} + x_{5D} \leq 18\,000\, v_5$

  Usine 6 $\quad x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} \leq 27\,000\, v_6.$

- L'équation «Client J » assure que la demande de chaque client sera satisfaite :

  Client A $\quad x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} + x_{5A} + x_{6A} = 35\,000$

  Client B $\quad x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} + x_{5B} + x_{6B} = 20\,000$

  Client C $\quad x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} + x_{5C} + x_{6C} = 45\,000$

  Client D $\quad x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D} + x_{5D} + x_{6D} = 10\,000.$

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale (les quantités expédiées d'une usine à un client sont exprimées en milliers de roues, pour abréger). Le coût total associé à cette solution est de 1 474 500 dollars.

Site *i*	v_i	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
1	1		15			15
2	0	–	–	–	–	–
3	1			18		18
4	1	32				32
5	1		5	13		18
6	1	3		14	10	27
Total	5	35	20	45	10	110

(b) On reprend le modèle (a) et on introduit quatre variables binaires ainsi définies :

$$w_{Bi} = 1 \text{ si l'usine } i \text{ approvisionne le client B,}$$

où i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. On remplace la contrainte « Client B » du modèle (a) par les contraintes suivantes :

Client Bi $\quad x_{iB} = 20\,000\, w_{Bi}$ $\quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Choix B $\quad w_{B1} + w_{B2} + w_{B3} + w_{B4} + w_{B5} + w_{B6} = 1.$

Le tableau ci-dessous, dans lequel les quantités sont exprimées en milliers de roues, décrit une solution optimale. Le coût total associé à cette solution est de 1 480 750 dollars. Le client B est desservi par l'usine 3.

Site *i*	***v**$_i$*	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
1	1			13		13
2	0	–	–	–	–	–
3	1		20			20
4	1	32				32
5	1			18		18
6	1	3		14	10	27
Total	5	35	20	45	10	110

Note. Seules les usines 3, 4 et 6 peuvent approvisionner le client B, puisque les capacités des autres usines sont inférieures à la demande de 20 000 roues de B. Par conséquent, il suffirait d'ajouter au modèle les variables w_{B3}, w_{B4} et w_{B6} seulement; évidemment, les contraintes « Client Bi », où i = 1, 2, 5, ne sont plus requises et l'équation « Choix B » devient : $w_{B3} + w_{B4} + w_{B6} = 1.$

(c) Il faut ajouter les contraintes suivantes au modèle (a) :

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \geq 13\,500\, v_1$$

$${}_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \geq \ 9\,000\, v_2$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \geq 19\,800\, v_3$$

$$x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} + x_{4D} \geq 27\,800\, v_4$$

$$x_{5A} + x_{5B} + x_{5C} + x_{5D} \geq 16\,200\, v_5$$

$$x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} \geq 24\,300\, v_6.$$

Le tableau ci-dessous, dans lequel les quantités sont exprimées en milliers de roues, décrit une solution optimale. Le coût total associé à cette solution est de 1 474 590 dollars.

Site *i*	***v**$_i$*	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
1	1		15			15
2	0	–	–	–	–	–
3	1			19,8		19,8
4	1	32				32
5	1		5	13		18
6	1	3		12,2	10	25,2
Total	5	35	20	45	10	110

(d) On reprend le modèle (a) et on introduit une variable binaire ainsi définie :

$$w_{A6} = 1 \quad \text{si l'usine érigée en 6 expédie des roues au client A.}$$

On ajoute au modèle ***(a)*** la contrainte suivante :

$$x_{6A} \leq 27\,000\ w_{A6}$$

et on ajoute dans la fonction-objectif le terme « + 50 000 w_{A6} ».

Le tableau ci-dessous, dans lequel les quantités sont exprimées en milliers de roues, décrit une solution optimale. Le coût total associé à cette solution est de 1 475 400 dollars.

Site *i*	v_i	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
1	1	3	12			15
2	0	–	–	–	–	–
3	1			18		18
4	1	32				32
5	1		8	10		18
6	1			17	10	27
Total	5	35	20	45	10	110

(e) On remplace les variables v_6 et x_{6J} par des variables de décision v_{6H} et x_{6HJ}, où H = M, N, P et J = A, B, C, D, les nouvelles variables étant définies ainsi :

$v_{6H} = 1$ si on retient la version H dans le cas où on érige une usine sur le site 6

x_{6HJ} = nombre de roues expédiées annuellement de la version H de l'usine 6 au client J.

Dans la fonction-objectif, les termes impliquant les variables éliminées sont remplacés par des termes analogues qui font intervenir les nouvelles variables :

$220\,000\ v_6$ remplacé par $200\,000\ v_{6M} + 250\,000\ v_{6N} + 350\,000\ v_{6P}$

$2{,}3\ x_{6A}$ remplacé par $2{,}4\ x_{6MA} + 2{,}35\ x_{6NA} + 2{,}3\ x_{6PA}$

$2{,}6\ x_{6B}$ remplacé par $2{,}7\ x_{6MB} + 2{,}65\ x_{6NB} + 2{,}6\ x_{6PB}$

$2{,}2\ x_{6C}$ remplacé par $2{,}3\ x_{6MC} + 2{,}25\ x_{6NC} + 2{,}2\ x_{6PC}$

$2{,}1\ x_{6D}$ remplacé par $2{,}2\ x_{6MD} + 2{,}15\ x_{6ND} + 2{,}1\ x_{6PD}$.

On procède de même dans les contraintes « CLIENT J » :

x_{6J} remplacé par $x_{6MJ} + x_{6NJ} + x_{6PJ}$.

À la contrainte « USINE 6 » sont substituées les contraintes suivantes :

$$x_{6MA} + x_{6MB} + x_{6MC} + x_{6MD} \leq 15\,000\ v_{6M}$$

$$x_{6NA} + x_{6NB} + x_{6NC} + x_{6ND} \leq 20\,000\ v_{6N}$$

$$x_{6PA} + x_{6PB} + x_{6PC} + x_{6PD} \leq 27\,000\ v_{6P}.$$

Enfin on ajoute la contrainte :

$v_{6M} + v_{6N} + v_{6P} \leq 1.$

Le tableau ci-dessous, dans lequel les quantités sont exprimées en milliers de roues, décrit une solution optimale. Le coût total associé à cette solution est de 1 593 750 dollars. C'est la version M de l'usine 6 qui est retenue ; et une usine est érigée sur le site 2.

Site *i*	v_i	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
1	1		15			15
2	1		5	3		8
3	1			22		22
4	1	32				32
5	1			18		18
6	M	3		2	10	15
Total	6	35	20	45	10	110

Note - Autre version du même modèle. On traite les versions 6M et 6N comme des sites portant les numéros 7 et 8 respectivement, le numéro 6 étant attribué à la version 6P. Le nouveau modèle a une structure analogue au modèle utilisé en (a), mais l'indice *i*, qui réfère à l'usine sur le site numéro *i*, varie cette fois de 1 à 8 et il faut ajouter la contrainte suivante :

$$v_6 + v_7 + v_8 \leq 1.$$

Remarquer que, dans la fonction-objectif, le terme « 220 000 v_6 » est remplacé par « 350 000 v_6 ».

Note - Autre modèle. On ajoute au modèle décrit en (a) des variables de décision v_{6M}, v_{6N}, v_{6P}, x_M et x_N définies ainsi :

$v_{6H} = 1$ si on retient la façon H dans le cas où on érige une usine sur le site 6

x_H = nombre de roues fabriquées à l'usine érigée sur le site 6 si on retient la façon H.

On récrit la contrainte « USINE 6 » de la façon suivante :

$$x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} \leq 15\,000\ v_{6M} + 20\,000\ v_{6N} + 27\,000\ v_{6P}.$$

Et on ajoute l'inéquation :

$$v_{6M} + v_{6N} + v_{6P} \leq 1.$$

Dans la fonction-objectif, on remplace le terme « 220 000 v_6 » par

$$200\,000\ v_{6M} + 250\,000\ v_{6N} + 350\,000\ v_{6P}$$

et on ajoute les termes

$$+\ 0{,}10\ x_M + 0{,}05\ x_N,$$

lesquels représentent les écarts dans les coûts de production entre l'usine de référence 6P et les usines 6M et 6N. Finalement, on ajoute les contraintes suivantes qui garantissent que $x_H = x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D}$ quand on retient l'option H (H = M, N) pour l'usine sur le site 6 :

$$x_H \leq 27\,000\ v_{6H} \qquad H = \text{M, N}$$

$$x_H \leq x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} \qquad H = \text{M, N}$$

$$x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} - x_H + 27\,000\ v_{6H} \leq 27\,000 \qquad H = \text{M, N}.$$

41. Automobiles de location à déplacer

On déplacera des petites voitures d'un bureau de location *i* disposant d'un surplus de telles voitures vers un bureau *j* souffrant d'une pénurie de petites voitures. On définit donc des variables de décision x_{ij} de la façon suivante :

x_{ij} = nombre de petites voitures que l'on déplacera du bureau *i* vers le bureau *j*

où $i = 3, 7$ et $j = 1, 2, 4, 5$. Pour déterminer combien de grosses voitures il faudra déplacer, on introduit de même des variables y_{ij} définies ainsi :

y_{ij} = nombre de grosses voitures que l'on déplacera du bureau *i* vers le bureau *j*

où $i = 1, 2, 7$ et $j = 3, 4, 5, 6$. L'objectif retenu dans le modèle est de minimiser le kilométrage total z parcouru par les voitures déplacées :

$$z = 16\,x_{31} + 7\,x_{32} + \ldots + 7\,x_{75} + 16\,y_{13} + \ldots + 7\,y_{75} + 9\,y_{76}.$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes.

- Un bureau de location *i* disposant de *b* voitures d'un type donné en surplus sera le point de départ de *b* voitures de ce type :

  PETITES *i* $\quad x_{i1} + x_{i2} + x_{i4} + x_{i5} = p_i \quad$ où $p_3 = 40 - 30 = 10$ et $p_7 = 65 - 40 = 25$

  GROSSES *i* $\quad y_{i3} + y_{i4} + y_{i5} + y_{i6} = g_i \quad$ où $g_1 = 23 - 15 = 8$ et $g_2 = 2$ et $g_7 = 24$.

- Un bureau de location *j* souffrant d'une pénurie de *b* voitures d'un type donné devra recevoir *b* voitures de ce type :

  PETITES *j* $\quad x_{3j} + x_{7j} = p_j \quad$ où $p_1 = 20 - 14 = 6$ et $p_2 = 1$ et $p_4 = 10$ et $p_5 = 18$

  GROSSES *j* $\quad y_{1j} + y_{2j} + y_{7j} = g_j \quad$ où $g_3 = 5$ et $g_4 = 10$ et $g_5 = 13$ et $g_6 = 6$.

Le kilométrage minimal qui sera parcouru par les voitures à déplacer est de 514 km. Voici la liste des variables non nulles d'une solution optimale :

$x_{34} = 10$		
$x_{71} = 6$	$x_{72} = 1$	$x_{75} = 18$
$y_{13} = 2$	$y_{16} = 6$	
$y_{23} = 2$		
$y_{73} = 1$	$y_{74} = 10$	$y_{75} = 13.$

Le coût minimal pour déplacer les voitures est donc de 668,20 $:

$$\text{coût minimal} = 514 \text{ km} \times 1{,}30 \text{ \$/km} = 668{,}20 \text{ \$}.$$

42. La Belle au bois dormant

(a) Le modèle comporte $(3 \times 4 - 2) = 10$ variables de décision entières définies de la façon suivante :

$$x_{Ij} = \text{nombre d'oreillers de type } I \text{ commandés chez le fabricant } j,$$

où I = A, B, C et j = 1, 2, 3, 4. Puisque le fabricant 3 n'offre pas le modèle A et que le fabricant 4 n'offre pas le modèle B, les variables x_{A3} et x_{B4} ne sont pas introduites dans le modèle. C'est pourquoi il y a 10 variables dans le modèle, et non 12.

L'objectif consiste à maximiser les bénéfices z que le magasin retirera de la vente des oreillers, où

$$z = 2{,}48\ x_{A1} + 2{,}5\ x_{A2} + 2{,}49\ x_{A4} + 1{,}33\ x_{B1} + 1{,}32\ x_{B2} + \ldots + 2{,}02\ x_{C3} + 1{,}96\ x_{C4}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories.

- L'équation « Type I » exige que, pour chacun des trois types, le nombre total d'oreillers commandés par l'acheteur coïncide avec la quantité désirée par la direction :

  Type A $\quad x_{A1} + x_{A2} + x_{A4} = 600$

  Type B $\quad x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} = 1\,500$

  Type C $\quad x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} = 1\,200.$

- L'inéquation «Fabric j » assure que le nombre total d'oreillers commandés chez un fabricant n'excédera pas le maximum auquel s'est engagé ce dernier :

  Fabric 1 $\quad x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 1\,000$

  Fabric 2 $\quad x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 3\,000$

  Fabric 3 $\quad x_{B3} + x_{C3} \leq 1\,200$

  Fabric 4 $\quad x_{A4} + x_{C4} \leq 3\,000.$

- Le 3^{e} et dernier groupe de contraintes est formé de $2 \times 3 = 6$ inéquations qui traduisent le minimum de 200 que s'impose l'acheteur :

  Min Aj $\quad x_{Aj} \geq 200 \qquad j = 1, 2, 4$

  Min Bj $\quad x_{Bj} \geq 200 \qquad j = 1, 2, 3.$

Le tableau suivant décrit une solution optimale qui génère un bénéfice de 5 917 dollars.

	1	2	3	4
A	200	200	–	200
B	200	200	1 100	–
C	600	500	100	0

Note. On aurait pu déterminer *a priori* que $x_{A1} = x_{A2} = x_{A4} = 200$: en effet, l'acheteur doit commander au moins 200 oreillers de type A de chacun des 3 fabricants 1, 2 et 4; ainsi, les 600 premiers oreillers de type A sont fixés par cette condition; or, la direction désire seulement 600 oreillers de ce type... On pourrait donc, en (a), éliminer les variables x_{Aj}, enlever les contraintes «Type A» et «Min A*j*», et adapter z ainsi que «Fabric *i*» en conséquence. On a préféré ici conserver ces variables et contraintes, afin de mettre en évidence le lien entre les questions (a) et (b).

(b) On reprend le modèle (a) et on introduit des variables de décision binaires ainsi définies :

$v_{Ij} = 1$ si l'acheteur commande des oreillers de type I du fabricant j.

Les contraintes technologiques sont celles du modèle (a), sauf que

« Min A*j* » est remplacée par l'inéquation double : $200\ v_{Aj} \leq x_{Aj} \leq 600\ v_{Aj}$

« Min B*j* » est remplacée par l'inéquation double : $200\ v_{Bj} \leq x_{Bj} \leq 1500\ v_{Bj}$.

Les bénéfices que le magasin retirera de la vente des oreillers s'établissent cette fois à 5 926 dollars. Voici une solution optimale :

$v_{A2} = 1$		$x_{A2} = 600$	
$v_{B1} = v_{B3} = 1$	$x_{B1} = 300$		$x_{B3} = 1\ 200$
	$x_{C1} = 700$	$x_{C2} = 500$.	

(c) On reprend le modèle (b) et on ajoute deux variables binaires ainsi définies :

$w_1 = 1$ si on commande 300 oreillers de type C du fabricant 1

$w_2 = 1$ si on commande entre 800 et 900 oreillers de type C du fabricant 1.

On ajoute les contraintes suivantes au modèle (b) :

$w_1 + w_2 \leq 1$

$300\ w_1 + 800\ w_2 \ \leq\ x_{C1}\ \leq\ 300\ w_1 + 900\ w_2$.

Dans ce nouveau contexte, la valeur maximale de la fonction-objectif z baisse à 5 925 dollars, soit un manque à gagner de 1 $ par rapport à la solution optimale de la question précédente. Voici une solution optimale :

$v_{A2} = 1$		$x_{A2} = 600$	
$v_{B1} = v_{B2} = v_{B3} = 1$	$x_{B1} = 200$	$x_{B2} = 200$	$x_{B3} = 1\ 100$
$w_2 = 1$	$x_{C1} = 800$	$x_{C2} = 300$	$x_{C3} = 100$.

43. L'entretien des appareils

(a) Le modèle comporte trois groupes de variables de décision :

y = semaine à la fin de laquelle toutes les révisions seront terminées

$v_{iJ} = 1$ si la révision de l'appareil J commence au début de la semaine i

x_i = nombre de techniciens requis la semaine i,

où $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et J = A, B, C, D, E. Noter que v_{iJ} n'est pas définie pour tout $(i\ ;\ J)$: par exemple, on n'introduira pas de variable v_{4A} car, selon l'énoncé, l'appareil A doit être mis à la disposition des techniciens au plus tard au début de la semaine numéro 3.

L'objectif consiste à minimiser la semaine à la fin de laquelle toutes les révisions seront terminées :

$$\text{Min } z = y.$$

Les contraintes technologiques forment quatre groupes.

- La révision de l'appareil J doit commencer entre le début au plus tôt et le début au plus tard donnés dans l'énoncé :

  Début A $\quad v_{1A} + v_{2A} + v_{3A} = 1$

  Début B $\quad v_{2B} + v_{3B} + v_{4B} = 1$

  Début C $\quad v_{3C} + v_{4C} + v_{5C} = 1$

  Début D $\quad v_{1D} + v_{2D} + v_{3D} = 1$

  Début E $\quad v_{2E} + v_{3E} + v_{4E} = 1.$

- Le nombre de techniciens requis une semaine donnée se calcule à partir des valeurs des variables v_{iJ} :

  Défn X1 $\quad x_1 = 4v_{1A} + 1v_{1D}$

  Défn X2 $\quad x_2 = 3v_{1A} + 4v_{2A} + 3v_{2B} + 4v_{1D} + 1v_{2D} + 6v_{2E}$

  Défn X3 $\quad x_3 = 2v_{1A} + 3v_{2A} + 4v_{3A} + 2v_{2B} + 3v_{3B} + 4v_{3C} + 5v_{1D} + 4v_{2D} + 1v_{3D} + 5v_{2E} + 6v_{3E}$

  Défn X4 $\quad x_4 = 2v_{2A} + 3v_{3A} + 3v_{2B} + 2v_{3B} + 3v_{4B} + 3v_{3C} + 4v_{4C} + 5v_{2D} + 4v_{3D} + 3v_{2E} + 5v_{3E} + 6v_{4E}$

  Défn X5 $\quad x_5 = 2v_{3A} + 3v_{3B} + 2v_{4B} + 3v_{3C} + 3v_{4C} + 4v_{5C} + 5v_{3D} + 3v_{3E} + 5v_{4E}$

  Défn X6 $\quad x_6 = 3v_{4B} + 3v_{4C} + 3v_{5C} + 3v_{4E}$

  Défn X7 $\quad x_7 = 3v_{5C}.$

- Le nombre de techniciens requis pendant la semaine i ne doit pas dépasser le nombre de techniciens disponibles :

  Disp Sem 1 $\quad x_1 \leq 12$

  Disp Sem 2 $\quad x_2 \leq 8$

  Disp Sem 3 $\quad x_3 \leq 10$

Disp Sem 4 $x_4 \leq 12$

Disp Sem 5 $x_5 \leq 15$

Disp Sem 6 $x_6 \leq 12$

Disp Sem 7 $x_7 \leq 10$.

- Si la révision de J est amorcée au début de la semaine i, l'appareil J est prêt à la fin de la semaine $i + 2$ et le nombre y de semaines requises pour l'ensemble des révisions est au moins égal à $i + 2$:

  B Fini $y \geq 4\ v_{2B} + 5\ v_{3B} + 6\ v_{4B}$

  C Fini $y \geq 5\ v_{3C} + 6\ v_{4C} + 7\ v_{5C}$

  E Fini $y \geq 4\ v_{2E} + 5\ v_{3E} + 6\ v_{4E}$.

Selon la solution optimale décrite dans le tableau ci-dessous, il est possible de compléter toutes les révisions en 6 semaines.

Appareil	**Début :**	**Nombre de techniciens requis durant la semaine**						
	semaine	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	1	4	3	2	–	–	–	–
B	3	–	–		2	3	–	–
C	4	–	–	–	4	3	3	–
D	1	1	4	5	–	–	–	–
E	4	–	–	–	6	5	3	–
Total		5	7	10	12	11	6	–

Note 1. Les variables d'étape x_i ne sont pas indispensables : on pourrait, en effet, construire un modèle équivalent en omettant ces variables, ainsi que les équations «Défn X*i*»; il faudrait évidemment modifier en conséquence les contraintes «Disp Sem *i*». De plus, les inéquations «Disp Sem *i*», où $i = 1, 6, 7$, sont inutiles, car le nombre de techniciens requis les semaines 1, 6 ou 7 sera nécessairement inférieur au nombre de techniciens disponibles ces semaines-là.

Les contraintes «C Fini» et «Début C» garantissent que $y \geq 5$. Il serait donc redondant d'inclure dans le modèle des contraintes «A Fini» et «D Fini». On pourrait également, compte tenu du fait que $y \geq 5$, omettre les termes référant aux semaines 4 et 5 dans les contraintes «B Fini» et «E Fini».

Note 2. Considérons la fonction-objectif z' définie de la façon suivante :

$$z' = v_{4B} + v_{4C} + 4\ v_{5C} + v_{4E}.$$

Si $z' \geq 4$, alors nécessairement $v_{5C} = 1$ et la révision est terminée la semaine 7; par contre, si $0 < z' < 4$, alors $v_{4B} = 1$ ou $v_{4C} = 1$ ou $v_{4E} = 1$ et la révision est terminée la semaine 6; enfin, la révision est terminée la semaine 5 quand $z' = 0$. On obtient donc un modèle équivalent en minimisant z'. Ce dernier modèle n'utilise ni la variable y, ni les contraintes du 4^e groupe.

(b) On reprend le modèle décrit en (a), en éliminant la variable y ainsi que les contraintes du 4e groupe. Par contre, on introduit une variable de décision supplémentaire ainsi définie :

x_m = nombre de techniciens requis durant la semaine la plus chargée.

L'objectif ici est de minimiser ce nombre maximal x_m de techniciens :

$$\text{Min } z = x_m .$$

Enfin, on ajoute aux contraintes technologiques des 3 premiers groupes de ***(a)*** les inéquations suivantes :

Max Sem i $\quad x_i \leq x_m \qquad i = 1, 2, ..., 7.$

Selon la solution optimale décrite dans le tableau ci-dessous, le nombre de techniciens requis durant la semaine la plus chargée est de 11. (La dernière ligne de ce tableau a été ajoutée pour illustrer la réponse à la question suivante.)

Appareil	**Début :** semaine	**Nombre de techniciens requis durant la semaine** 1	2	3	4	5	6	7
A	1	4	3	2	–	–	–	–
B	4	–	–	–	3	2	3	–
C	5	–	–	–	–	4	3	3
D	1	1	4	5	–	–	–	–
E	4	–	–	–	6	5	3	–
Total		5	7	7	9	11	9	3
Écart		–	2	0	2	2	2	6

(c) À nouveau, on reprend le modèle décrit en (a), en éliminant la variable y ainsi que les contraintes du 4e groupe. Et on introduit des variables de décision supplémentaires s_i et t_i (i = 2, 3, ..., 7) qui représentent l'écart positif entre les effectifs des semaines i et $i - 1$:

si $x_i \geq x_{i-1}$, $\quad s_i = x_i - x_{i-1} \quad$ et $\quad t_i = 0$

si $x_i < x_{i-1}$, $\quad t_i = x_i - x_{i-1} \quad$ et $\quad s_i = 0$.

L'objectif ici est de minimiser la somme de ces écarts :

$$\text{Min } z = s_2 + t_2 + s_3 + t_3 + s_4 + t_4 + s_5 + t_5 + s_6 + t_6 + s_7 + t_7.$$

Enfin, on ajoute aux contraintes technologiques des 3 premiers groupes de (a) les équations suivantes :

Défn STi $\quad s_i - t_i = x_i - x_{i-1} \qquad i = 2, 3, ..., 7.$

Les fluctuations d'effectifs d'une semaine à l'autre sont au minimum de 14 techniciens pour l'ensemble de la période de révision : la solution optimale donnée en (b) constitue une solution optimale pour le modèle de (c) également.

(d) à (i) *On reprend le modèle décrit en* (a), *ou encore celui décrit dans la note 1 de* (a). *Et on ajoute, successivement, la ou les contraintes données ci-dessous.*

(d) $v_{2B} \leq v_{1D} + v_{2D}$.

Dans ce cas, à l'optimum, $v_{1A} = v_{3B} = v_{4C} = v_{1D} = v_{4E} = 1$ et $z = 6$.

(e) $v_{i\,B} = v_{i\,E}$ $i = 2, 3, 4$.

Dans ce cas, à l'optimum, $v_{1A} = v_{4B} = v_{5C} = v_{1D} = v_{4E} = 1$ et $z = 7$.

Note. Ces 3 équations, prises ensemble, sont équivalentes, en vertu des contraintes « Début B » et « Début E », à l'équation unique suivante : $(v_{2B} - v_{2E}) + 2\,(v_{3B} - v_{3E}) + 3\,(v_{4B} - v_{4E}) = 0$.

(f) $v_{iD} + v_{iA} \leq 1$ $i = 1, 2, 3$.

Dans ce cas, à l'optimum, $v_{1A} = v_{4B} = v_{5C} = v_{3D} = v_{3E} = 1$ et $z = 7$.

(g) $v_{3C} = 0$

$v_{4C} \leq v_{1D}$

$v_{5C} \leq v_{1D} + v_{2D}$.

Dans ce cas, à l'optimum, $v_{1A} = v_{3B} = v_{4C} = v_{1D} = v_{4E} = 1$ et $z = 6$.

(h) $v_{1A} + v_{1D} = 1$

$v_{2A} + v_{2B} + v_{2D} + v_{2E} = 2$

$v_{3A} + v_{3B} + v_{3C} + v_{3D} + v_{3E} = 0$.

Dans ce cas, il s'avère qu'il n'y a pas suffisamment de techniciens disponibles.

(i) Les révisions de A, B et D s'amorcent nécessairement entre les semaines 1 et 4. La condition implique donc que la révision de l'un de ces 3 appareils débutera la semaine 2, celle d'un autre la semaine 3, et que celle du troisième sera entamée soit la semaine 1, soit la semaine 4. En présence des contraintes «Début *J*», cette dernière condition se traduit mathématiquement par l'ensemble des deux équations ci-dessous.

$$v_{2A} + v_{2B} + v_{2D} = 1$$

$$v_{3A} + v_{3B} + v_{3D} = 1.$$

Dans ce cas également, il s'avère qu'il n'y a pas suffisamment de techniciens disponibles.

44. Les ciments éburnéens

Le modèle comporte trois groupes de variables de décision. Les deux premiers réfèrent aux quantités produites ou expédiées vers les entrepôts :

x_{iJ} = nombre de tonnes produites par la cimenterie J au cours du mois i

y_{iJk} = nombre de tonnes expédiées à la fin du mois i de la cimenterie J vers l'entrepôt k

où i = 1, 2, 3 et J = A, B et k = 1, 2. Les variables du 3[e] groupe indiquent les quantités qui resteront entreposées durant les divers mois :

s_{ih} = nombre de tonnes entreposées en h (cimenterie ou entrepôt) au début du mois i

où i = 1, 2, 3, 4 et h = A, B, 1, 2. L'objectif s'écrit :

$$\text{Min } z = CProd + CEntr + CTransp$$

où

$$CProd = 125\, x_{1A} + 120\, x_{2A} + 127\, x_{3A} + 121\, x_{1B} + 124\, x_{2B} + 122\, x_{3B}$$

$$CEntr = 0{,}75\, s_{2A} + 1\, s_{3A} + 2\, s_{4A} + 0{,}85\, s_{2B} + \ldots + 1{,}5\, s_{21} + \ldots + 1{,}85\, s_{42}$$

$$CTransp = 4\, y_{1A1} + 1\, y_{1A2} + 5\, y_{2A1} + \ldots + 1{,}25\, y_{1B1} + \ldots + 3{,}25\, y_{3B2}.$$

Les contraintes technologiques forment cinq groupes.

- La production totale de la cimenterie J durant le mois i ne doit pas dépasser la capacité de la cimenterie :

  Prod Max iA $\quad x_{iA} \leq 10\ 000 \quad\quad i = 1, 2, 3$

  Prod Max iB $\quad x_{iB} \leq 12\ 000 \quad\quad i = 1, 2, 3.$

- À l'entrepôt 1 est associé un groupe de dix contraintes. Les quatre premières définissent les variables s_{i1} :

  Défn S11 $\quad s_{11} = 1\ 500$

  Défn S21 $\quad s_{21} = s_{11} + y_{1A1} + y_{1B1}$

  Défn S31 $\quad s_{31} = s_{21} + y_{2A1} + y_{2B1} - 15\ 000$

  Défn S41 $\quad s_{41} = s_{31} + y_{3A1} + y_{3B1} - 9\ 000.$

  Les six autres exigent que la valeur de s_{i1} (i = 2, 3, 4) ne soit ni inférieure à la demande du mois i, ni supérieure à la capacité de 16 000 tonnes de l'entrepôt 1 :

  Entr Bornes S21 $\quad 15\ 000 \leq s_{21} \leq 16\ 000$

  Entr Bornes S31 $\quad 9\ 000 \leq s_{31} \leq 16\ 000$

  Entr Bornes S41 $\quad 14\ 000 \leq s_{41} \leq 16\ 000.$

- Un groupe analogue de dix contraintes est associé à l'entrepôt 2.

- De même, à la cimenterie A est associé un groupe de huit contraintes. Les quatre premières définissent les variables s_{iA} :

  Défn S1A $\quad s_{1A} = 0$

  Défn S2A $\quad s_{2A} = s_{1A} + x_{1A} - (y_{1A1} + y_{1A2})$

Défn S3A $s_{3A} = s_{2A} + x_{2A} - (y_{2A1} + y_{2A2})$

Défn S4A $s_{4A} = s_{3A} + x_{3A} - (y_{3A1} + y_{3A2})$.

La non-négativité de s_{iA} garantit que les expéditions à partir de A ne dépassent pas ce qui est disponible. Enfin, des inéquations forcent les quantités conservées à la cimenterie à n'excéder, en aucun moment, la limite de 3 000 tonnes indiquée dans l'énoncé :

Entr Max iA $s_{iA} \leq 3\,000$ $i = 1, 2, 3, 4$.

- Un groupe analogue de huit contraintes est associé à la cimenterie B.

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale. Au début du mois 4, les stocks en usine seront nuls, tandis que ceux dans les entrepôts seront tout juste suffisants pour répondre à la demande du mois. Enfin, la valeur minimale de z est 7 521 800 (dollars).

Usines	**Usine A**			**Usine B**		
	Mois 1	**Mois 2**	**Mois 3**	**Mois 1**	**Mois 2**	**Mois 3**
En stock, mois courant	0	1 000	3 000	0	0	2 000
Production	6 800	10 000	8 000	12 000	11 000	12 000
Livraison						
à l'entrepôt 1	1 500	0	0	12 000	9 000	14 000
à l'entrepôt 2	4 300	8 000	11 000	0	0	0
En stock, mois suivant	1 000	3 000	0	0	2 000	0
Entrepôts	**Entrepôt 1**			**Entrepôt 2**		
	Mois 2	**Mois 3**	**Mois 4**	**Mois 2**	**Mois 3**	**Mois 4**
En stock, avant livraison	1 500	0	0	1 700	0	0
Livraison						
de l'usine A	1 500	0	0	4 300	8 000	11 000
de l'usine B	12 000	9 000	14 000	0	0	0
En stock, début du mois	15 000	9 000	14 000	6 000	8 000	11 000
Demande	15 000	9 000	14 000	6 000	8 000	11 000
En stock, fin du mois	0	0	0	0	0	0

Note. Pour que la fonction-objectif z représente vraiment les coûts réels, il conviendrait d'ajouter les frais d'entreposage, au cours du premier mois, des 1 500 tonnes de ciment dans l'entrepôt 1 et des 1 700 tonnes dans l'entrepôt 2. De plus, la définition de z utilise les stocks en début du mois pour déterminer les coûts *CEntr*; il serait plus réaliste de tenir compte des stocks moyens pendant le mois. Par exemple, si on présume que la demande est uniforme, les stocks en entrepôt baissent linéairement pendant le mois, passant de s_{ik} à $s_{ik} - d_{ik}$, où d_{ik} est la demande du mois i à l'entrepôt k : ainsi, le terme dans *CEntr* correspondant à la variable s_{21} devrait être égal à $1{,}50\,(s_{21} - 15000/2)$. Ces ajustements, qui globalement reviennent à ajouter une constante à z, n'affectent pas les solutions optimales et n'ont pas été considérés explicitement dans le modèle.