Chapitre 5. Le flot maximal - Solutions

2. Arcs avant et arcs arrière

(a) Arcs avant : 14, 15, 24, 25 et 36.

Flot total sur les arcs avant = 0 + 8 + 3 + 7 + 3 = 21.

(b) Arcs arrière : 43.

Flot total sur les arcs arrière = 3.

(c) D'après la formule (5.3), le flot émis est égal à la différence entre le flot total sur les arcs avant et le flot total sur les arcs arrière : $v = 21 - 3 = 18$. Cette valeur est correcte, puisque $v = x_{12} + x_{15} = 10 + 8 = 18$.

(d) Arcs avant : 23, 43, 46 et 57.

Flot total sur les arcs avant = 0 + 3 + 7 + 8 = 18.

(e) Arcs arrière : aucun.

Flot total sur les arcs arrière = 0.

(f) $v = 18 - 0 = 18$.

(g) La valeur v^* du flot maximum est bornée par les capacités c_1 et c_2 des coupes considérées précédemment :

$$v^* \leq \min \{ c_1 , c_2 \} = \min \{ 50+8+50+40+55, 60+3+7+60 \} = \min \{203, 130\} = 130.$$

(h) $1 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 7$.

(i) On diminue le flot de 7 unités sur le chemin 1 – 2 – 5 – 4 – 6 – 7 et on augmente de 7 unités le flot sur les chemins 1 – 4 – 6 – 7 et 1 – 2 – 5 – 7.

3. Calcul d'une solution optimale

On utilise le chemin d'augmentation donné en 2(h), puis le chemin $1 \rightarrow 4 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$. Le tableau suivant donne les valeurs x_{ij} du flot sur les arcs *ij* du réseau. La ligne «Solution 0» décrit le flot de la solution admissible illustrée dans l'énoncé de l'exercice 2; la ligne «Solution 1», celui de la solution obtenue après l'ajout du flot associé à la 1re chaîne; la ligne «Solution 2», celui de la solution obtenue après la prise en compte de la 2e chaîne.

	12	14	15	23	24	25	36	43	46	54	57	67	v
Solution 0	10	-	8	-	3	7	3	3	7	7	8	10	18
Solution 1	10	7	8	-	3	7	3	3	7	-	15	10	25
Solution 2	10	10	8	3	-	7	6	3	7	-	15	13	28

4. Calcul du flot maximum

(a) On construit une solution initiale en expédiant 14 unités par le chemin 1 – 2 – 5 – 6, 8 unités par le chemin 1 – 4 – 6, 11 unités par le chemin 1 – 3 – 6 et 7 unités par le chemin 1 – 3 – 4 – 6. Le flot total est de 14 + 8 + 11 + 7 = 40 unités. On vérifie que cette solution est optimale. Le tableau suivant donne les valeurs x_{ij} du flot sur les arcs ij du réseau.

12	13	14	23	25	34	35	36	43	45	46	56	v
14	18	8	-	14	7	-	11	-	-	15	14	40

(b) On construit une solution initiale en expédiant 10 unités par le chemin 1 – 7, 12 unités par le chemin 1 – 2 – 3 – 7 et 15 unités par le chemin 1 – 6 – 7. Le flot est de 10 + 12 + 15 = 37 unités. On vérifie que la solution obtenue est optimale. Le tableau suivant donne les valeurs x_{ij} du flot sur les arcs ij du réseau.

12	15	16	17	23	37	46	47	52	56	67	v
12	-	15	10	12	12	-	-	-	-	15	37

5. Amélioration d’une solution admissible

(a) On augmente le flot en utilisant la chaîne d’augmentation 1 → 5 ← 4 → 6, dont la valeur est de 7 unités. Le flot circulant de la source au puits est alors de 14 + 7 = 21 unités. On vérifie que la solution obtenue est optimale. Le tableau suivant donne le flot pour la solution illustrée, ainsi que pour la solution optimale obtenue.

	12	14	15	23	24	31	32	45	46	56	v
Solution 0	7	7	-	7	7	-	7	7	7	7	14
Solution 1	7	7	7	7	7	-	7	-	14	7	21

(b) On augmente le flot en utilisant la chaîne d’augmentation 1 → 4 ← 3 → 8 puis la chaîne 1 → 5 ← 2 → 8. Le flot circulant de la source au puits est alors de 71 + 10 + 7 = 88 unités. On vérifie que la solution obtenue est optimale. Le tableau suivant donne le flot pour la solution illustrée, ainsi que pour chacune des solutions rencontrées.

N°	13	14	15	16	25	27	28	32	34	38	45	48	53	56	58	62	68	73	78	v
0	30	-	21	20	7	8	32	20	10	17	-	10	14	7	7	27	-	3	5	71
1	30	10	21	20	7	8	32	20	-	27	-	10	14	7	7	27	-	3	5	81
2	30	10	28	20	-	8	39	20	-	27	-	10	14	7	7	27	-	3	5	88

6. Coupes dans un réseau

(a) Le tableau ci-dessous décrit les $2^{5-2} = 8$ coupes possibles.

Nº	S	Arcs avant	Arcs arrière	$u(S, \overline{S})$
1	{1}	12, 13 et 14	Aucun	84
2	{1, 2}	13, 14, 23 et 25	32	112
3	{1, 3}	12, 14, 32, 34 et 35	23 et 43	90
4	{1, 4}	12, 13, 43 et 45	34	80
5	{1, 2, 3}	14, 25, 34 et 35	43	105
6	{1, 2, 4}	13, 23, 25, 43, 45	32 et 34	113
7	{1, 3, 4}	12, 32, 35 et 45	23	59
8	{1, 2, 3, 4}	25, 35 et 45	Aucun	74

(b) La coupe de capacité minimale est $S = \{1, 3, 4\}$.

(c) On peut acheminer au maximum 59 unités de la source au puits.

7. Vérification de l'optimalité

(a) Dans la solution illustrée, 46 unités de flot circulent de la source au puits : 12 + 21 + 13 = 46.

(b) La quantité de flot acheminée de la source au puits dans la solution illustrée est maximale, car cette quantité est égale à la capacité de la coupe associée à l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$:

Arcs avant : 14, 25, 35 et 36; $u(S, \overline{S}) = 13 + 12 + 10 + 11 = 46$.

8. Flot maximum et coupe de capacité minimale

(a) Pour augmenter le flot, on utilise d'abord les chemins d'augmentation 1 – 3 – 5 – 6 – 8, puis 1 – 2 – 4 – 8 et enfin 1 – 2 – 5 – 7 – 8; par la suite, il faut recourir à la chaîne d'augmentation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \leftarrow 4 \rightarrow 8$. Le flot maximum est de 33 unités. Le tableau suivant donne le flot pour chacune des solutions rencontrées lors de la résolution de ce problème, la solution numéro 0 étant celle illustrée dans l'énoncé. La coupe $(S, \overline{S})$, où = {1, 2, 3, 5}, est une coupe de capacité minimale.

	12	13	23	24	25	35	45	48	56	57	67	68	74	78	v
Solution 0	3	-	-	3	-	-	3	-	-	3	-	-	-	3	3
Solution 1	3	9	-	3	-	9	3	-	9	3	-	9	-	3	12
Solution 2	18	9	-	18	-	9	3	15	9	3	-	9	-	3	27
Solution 3	21	9	-	18	3	9	3	15	9	6	-	9	-	6	30
Solution 4	24	9	-	18	6	9	-	18	9	6	-	9	-	6	33

(b) Pour augmenter le flot, on utilise le chemin d'augmentation 1 – 2 – 7 – 8, puis les chaînes d'augmentation $1 \rightarrow 6 \leftarrow 4 \rightarrow 8$ et $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8$. Le flot maximum est de 190 unités. Le tableau suivant donne le flot pour chacune des solutions rencontrées lors de la résolution de ce problème, la solution numéro 0 étant celle illustrée dans l'énoncé. La coupe $(S, \overline{S})$, où = {1, 2, 5, 6}, est une coupe de capacité minimale.

	12	13	14	16	25	27	32	34	35	46	48	57	65	68	76	78	v
Solution 0	-	35	45	-	-	-	-	-	35	45	-	35	-	45	-	35	80
Solution 1	30	35	45	-	-	30	-	-	35	45	-	35	-	45	-	65	110
Solution 2	30	35	45	45	-	30	-	-	35	-	45	35	-	45	-	65	155
Solution 3	65	35	45	45	35	30	-	35	-	-	80	35	-	45	-	65	190

9. Coupe de capacité minimale

(a) $S = \{1, 4\}$, dont les arcs avant sont 12, 15, 43 et 46 : $u(S, \overline{S}) = 10 + 8 + 3 + 7 = 28$.

(b) $S = \{1\}$, dont les arcs avant sont 12, 14 et 15 : $u(S, \overline{S}) = 7 + 7 + 7 = 21$.

(c) $S = \{1, 4, 5\}$, dont les arcs avant sont 13, 16, 48, 53, 56 et 58 : $u(S, \overline{S}) = 88$.

10. Expédition à Bornéo

On pourrait acheminer un maximum de 200 tonnes en procédant de la façon indiquée dans le tableau suivant.

Vol	M2	M4	23	24	34	35	45	46	5B	6B
Quantité (en t)	100	100	20	80	-	20	55	125	75	125

Note. La solution décrite dans le tableau ci-dessus est obtenue des 4 chemins suivants :

M – 2 – 3 – 5 – B	quantité expédiée = 20
M – 2 – 4 – 6 – B	quantité expédiée = 80
M – 4 – 6 – B	quantité expédiée = 45
M – 4 – 5 – B	quantité expédiée = 55.

Comme il n'y a que 190 tonnes à acheminer, il suffira de réduire de 10 tonnes la quantité expédiée sur l'un de ces chemins. On choisira pour cette diminution de préférence le moins coûteux de ces chemins.

11. Un réseau de métro

(a) Vingt rames, dont 10 par le chemin D – W – H et 10 par le chemin D – B – L – H.

(b) En augmentant de 10 rames la capacité sur la ligne LH, on pourrait envoyer 10 rames supplémentaires de D à H. Ces rames empruntant le chemin D – S – L – H.

(c) Il suffit d'enlever du réseau l'arête DB. On constate que le flot maximal de D à H dans le réseau obtenu est encore de 20 unités, les 10 unités convoyées par le 2^{e} chemin passant maintenant par le chemin D – B – L – H.

12. Lavage de camions

(a) On cherche le flot maximal dans le réseau où 1 est la source et *p*, le puits. On obtient qu'on peut évacuer un maximum de 8 000 m^3 d'eaux usées en une heure. Le tableau suivant décrit une solution optimale.

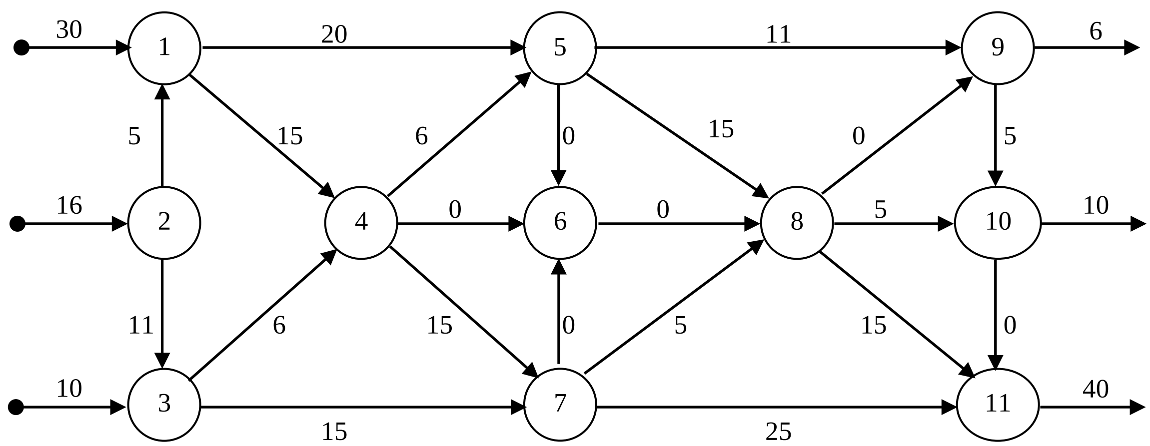
Arc	12	13	14	25	27	36	47	58	5*p*	64	67	69	7*p*	8*p*	9*p*
Flot	4	2	2	2	2	2	2	-	2	-	-	2	4	-	2

(b) On cherche cette fois le flot maximal dans le réseau où 1 et 5 sont des sources. On obtient qu'on peut évacuer un maximum de 12 000 m^3 d'eaux usées en une heure. Le tableau suivant décrit deux solutions optimales : dans la première, 8 000 m^3 d'eaux proviennent de la grille 1 et 4 000 m^3, de la grille 1; dans la seconde, 6 000 m^3 d'eaux proviennent de chacune des grilles 1 et 5.

Arc	12	13	14	25	27	36	47	58	5*p*	64	67	69	7*p*	8*p*	9*p*
Solution 1	4	2	2	2	2	2	2	3	3	-	-	2	4	3	2
Solution 2	2	2	2	-	2	2	2	3	3	-	-	2	4	3	2

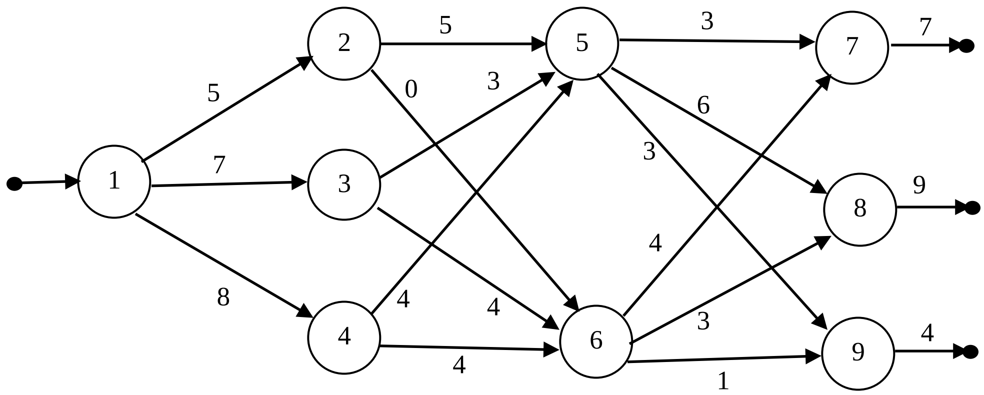
13. Transport de palettes

Si on respecte les capacités indiquées, on peut acheminer un maximum de 56 charges. Une façon d'y arriver est illustrée dans la figure ci-après. Mais, en augmentant la capacité de l'arc (8,10) de 4 unités, on pourrait expédier 4 charges additionnelles par le chemin 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 10.



14. Le maître passeur

(a) Un maximum de 20 candidats pourront emprunter le réseau le mois prochain. Une façon de les répartir entre les différents itinéraires est illustrée dans la figure ci-après.



(b) La formule suggérée dans l'énoncé est incorrecte; il faut plutôt poser : $c_{ij} = -\ln(p_{ij})$. Le tableau suivant donne les valeurs obtenues.

Arc	12	13	14	25	26	35	36	45	46	57	58	59	67	68	69
c_{ij}	0,163	0,105	0,163	0,223	0,051	0,051	0,105	0,163	0,105	0,223	0,163	0,163	0,105	0,051	0,051

Le chemin 1 – 3 – 6 – 9 maximise les chances de succès : la probabilité de se rendre sans problème de 1 à 9 par ce chemin est égale à 90% × 90% × 95% = 76,95%.

15. Barrages routiers

(a) Il s'agit de rechercher une coupe de capacité minimale dans le réseau obtenu du graphe en affectant une capacité de 1 à chacun des arcs. On constate que 3 barrages sur les arcs suffisent, car $u^* = 3$. Il existe plusieurs coupes de capacité 3, dont $S = \{s, 4, 5\}$.

(b) On dédouble d'abord les sommets autres que la source et le puits : pour tout i de 1 à 10, on ajoute un sommet i' et un arc $i \to i'$; tout arc de la forme $i \to j$ est remplacé par l'arc $i' \to j$; enfin, tout arc de la forme $i \to$ P est remplacé par l'arc $i' \to$ P. Par exemple, le chemin s → 1 → 2 → 9 → P devient s → 1 → 1' → 2 → 2' → 9 → P. On recherche ensuite une coupe minimale dans le réseau obtenu en affectant une capacité de 1 à chacun des arcs de la forme $i \to i'$, et une capacité de M à chacun des autres arcs du réseau. Ici, M est une constante élevée, par exemple, $M = 100$.

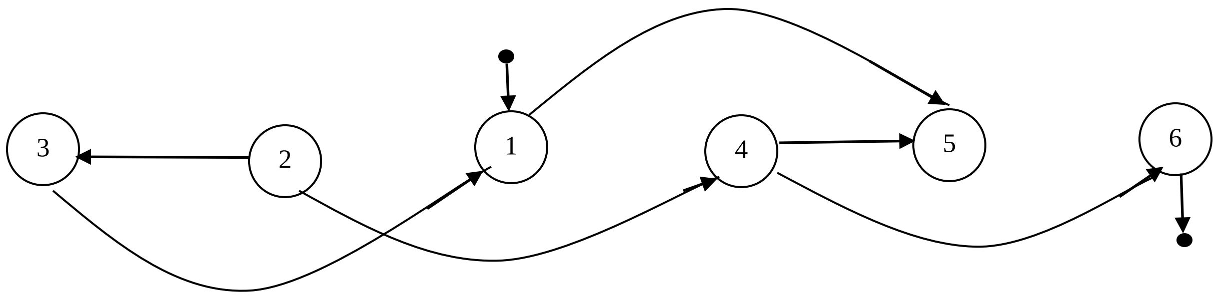
On obtient que 2 barrages aux sommets suffisent, car $u^* = 2$. La coupe $(S, \overline{S})$, où $S = \{s, 4, 4', 5, 5', 7, 10\}$ est minimale; ses arcs avant sont 7 → 7' et 10 → 10' et sa capacité est de 2 unités.

16. Trouver les erreurs

La capacité de l'arc 13 est inférieure à la valeur du flot sur cet arc. La contrainte de conservation de flot n'est pas respectée aux sommets de transbordement 4, 6 et 7. Le puits reçoit 19 unités de flot, et non 18 tel qu'indiqué sur l'arc virtuel.

17. Recherche systématique d'un chemin d'augmentation

Dire qu'il existe au moins un chemin d'augmentation de la source au puits dans le réseau de l'exercice 5(a) revient à affirmer que le sommet 6 est accessible à partir du sommet 1 dans le réseau ci-dessous obtenu en enlevant les arcs saturés.



Il s'agit donc d'appliquer à ce réseau la procédure «Calcul de P(1)» de la page 77. Le sommet 1 est coché lors de l'étape 0. Puis s'enclenche l'étape 1.

- Dans un premier temps, le sommet 1 est analysé : le sommet 5 est alors coché.
- Lors de l'itération suivante, le sommet 5 est analysé et aucun sommet n'est coché.
- Il ne reste alors plus de sommets cochés et non analysés. L'étape 1 se termine.

Le puits 6 n'est pas coché et n'est donc pas accessible à partir de la source 1.

18. Modèle linéaire

(a) La variable de décision x_{ij} est définie comme la quantité de flot circulant sur l'arc *ij*. Le modèle contient une telle variable pour chacun des arcs du réseau; comme il y a 12 arcs dans le réseau considéré, le modèle comportera 12 variables de décision.

(b) L'objectif est de maximiser le flot total *v*. Ce flot total est, comme nous le verrons en (c), égal au flot extrant de la source 1, ou encore au flot intrant au puits 7.

(c) Source 1 : $x_{12} + x_{13} + x_{14} = v$

Puits 7 : $-x_{57} - x_{67} = -v$

(d) Sommet 4 : $x_{43} + x_{46} - x_{14} - x_{24} - x_{54} = 0$

(e) Le modèle comporte aussi, pour chaque arc *ij*, une contrainte de non-négativité de la variable x_{ij} et une contrainte exigeant que le flot ne dépasse pas la capacité de l'arc : $0 \le x_{ij} \le u_{ij}$.

19. Modèle linéaire et coupes

(a) La variable de décision x_{ij} est définie comme la quantité de flot circulant sur l'arc *ij*. Le tableau suivant donne les valeurs de ces variables dans la solution illustrée.

Arc *ij*	12	13	14	16	25	27	32	34	35	46	48	57	65	68	76	78
x_{ij}	-	35	45	-	-	-	-	-	35	45	-	35	-	45	-	35

(b) Source 1 : $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} = v$

Puits 8 : $-x_{48} - x_{68} - x_{78} = -v$

(c) Sommet 6 : $x_{65} + x_{68} - x_{16} - x_{46} - x_{76} = 0$

(d) Arcs avant : 13, 14, 16, 25, 76 et 78. Flot total = 35 + 45 + 0 + 0 + 0 + 35 = 115.

(e) Arcs arrière : 32 et 57. Flot total = 0 + 35 = 35.

(f) v = (Flot total sur les arcs avant) – (Flot total sur les arcs arrière) = 115 – 35 = 80

(g) Arcs avant : 13, 14, 27, 57 et 68. Flot total = 35 + 45 + 0 + 35 + 45 = 160

Arcs arrière : 32, 35, 46 et 76. Flot total = 0 + 35 + 45 + 0 = 80

v = (Flot total sur les arcs avant) – (Flot total sur les arcs arrière) = 160 – 80 = 80