

(b) Méthode des coûts minimaux : coût total = 2140.

	D1	D2	D3	D4	D5	
A1	41	17	14	11	7	50
			10	10	30	
A2	4	25	56	8	19	
	30			20		
A3	5	12	52	21	48	50
		30	20			
	30	30	30	30	30	150

(c) Comme la plupart des coûts unitaires élevés sont sur la «diagonale» reliant les cases (1,1) et (3,5) et que la plupart des coûts unitaires faibles sont loin de cette diagonale, il était prévisible que la solution initiale découlant de la méthode du coin nord-ouest soit de coût total supérieur à celle obtenue à l'aide de la méthode des coûts minimaux. Il serait déraisonnable de croire que la solution obtenue en (b) soit optimale étant donné le coût unitaire très élevé de la dernière attribution – celle dans la case (3,3).

Note. Les coûts marginaux des cases (3,1) et (3,4) sont négatifs, ce qui montre bien que la solution obtenue en (b) n'est pas optimale.

3. Choix des cases entrante et sortante

- (a) La case entrante est (2,2); le cycle de changement est formé des cases (2,2), (3,2), (3,6), (1,6), (1,4) et (2,4).
- (b) La case sortante est (2,4).
- (c) La solution de base résultante est décrite ci-dessous. Le gain est égal à $14 \times 8 = 112$.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	
O1	12	9	11	8	5	21	37
	25			10		2	
O2	15	6	5	7	3	9	45
		8	17		20		
O3	8	4	12	10	11	4	20
		10				10	
	25	18	17	10	20	12	102

4. Construction des cycles de changement

- (a) Le tableau suivant donne les cycles de changement et les coûts marginaux des différentes cases hors base.

Case hors base	Cycle de changement	Coût marginal
(1,1)	(1,1), (1,2), (3,2), (3,1)	15
(1,3)	(1,3), (1,2), (3,2), (3,3)	5
(2,2)	(2,2), (3,2), (3,1), (2,1)	-1
(2,3)	(2,3), (3,3), (3,1), (2,1)	-7

- (b) Case entrante : (2,3).
 (c) Case sortante : (3,3).

5. Une itération de l'algorithme du transport

- (a) Le tableau suivant donne les cycles de changement et les coûts marginaux des différentes cases hors base.

Case hors base	Cycle de changement	Coût marginal
(1,1)	(1,1), (1,2), (2,2), (2,1)	9
(1,3)	(1,3), (1,2), (3,2), (3,3)	2
(2,3)	(2,3), (2,2), (3,2), (3,3)	-1
(3,1)	(3,1), (2,1), (2,2), (3,2)	-3

- (b) Case entrante : (3,1).
 (c) Case sortante : (3,2).
 (d) $\Delta = 75$ et Gain = $3 \times 75 = 225$.

6. Résolution de problèmes de transport

- (a) Le tableau suivant décrit les deux solutions de base rencontrées lors de la résolution de ce problème. La 1^{re}, représentée à gauche, est la solution initiale découlant de la méthode des coûts minimaux. Pour obtenir l'autre, on a effectué une itération de l'algorithme du transport : (3,1) fut la case entrante et (3,2), la case sortante; enfin, le gain fut $7 \times 75 = 525$. Cette seconde solution est optimale et son coût total est égal à 5200.

	D1	D2	D3	D1	D2	D3
O1	-	325	-	-	325	-
O2	300	100	-	225	175	-
O3	-	75	200	75	-	200

- (b) Le tableau suivant décrit les trois solutions de base rencontrées lors de la résolution de ce problème. La 1^{re}, représentée à gauche, est la solution initiale découlant de la méthode des coûts minimaux, ou encore de la méthode du coin nord-ouest. Pour obtenir les deux autres, on a effectué deux

itérations de l'algorithme du transport : lors de la 1^{re}, (2,3) fut la case entrante et (2,2), la case sortante; lors de la seconde, les cases entrante et sortante furent (3,1) et (3,3) respectivement. La 3^e et dernière solution est optimale et son coût total est égal à 2945.

	D1	D2	D3	D1	D2	D3	D1	D2	D3
O1	80	-	-	80	-	-	80	-	-
O2	60	60	-	60	-	60	55	-	65
O3	-	40	65	-	100	5	5	100	-

7. Le transport des palettes

Le tableau suivant décrit les trois solutions de base rencontrées lors de la résolution de ce problème. La 1^{re}, représentée à gauche, est la solution initiale découlant de la méthode des coûts minimaux. Pour obtenir les deux autres, on a effectué deux itérations de l'algorithme du transport : lors de la 1^{re}, (1,5) fut la case entrante et (3,5), la case sortante; lors de la seconde, les cases entrante et sortante furent (3,4) et (3,1) respectivement. La 3^e et dernière solution est optimale et son coût total est égal à 327 800. Il s'agit du seul plan optimal, car les coûts marginaux des cases hors base sont tous positifs.

	C1	C2	C3	C4	C5	C1	C2	C3	C4	C5	C1	C2	C3	C4	C5
L1	350	-	-	450	-	50	-	-	450	300	400	-	-	100	300
L2	-	-	400	-	-	-	-	400	-	-	-	-	400	-	-
L3	50	350	100	-	300	350	350	100	-	-	-	350	100	350	-

8. Un problème admettant plusieurs solutions optimales

- (a) La portion gauche du tableau suivant décrit la solution initiale découlant de la méthode des coûts minimaux.

	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
O1	15	20	-	-	-	15	2	-	-	18	15	-	-	2	18
O2	-	7	11	4	18	-	25	11	4	-	-	27	11	2	-
O3	-	-	-	25	-	-	-	-	25	-	-	-	-	25	-

- (b) Il s'agit d'effectuer deux itérations de l'algorithme du transport : lors de la 1^{re}, (1,5) est la case entrante et (2,5), la case sortante; lors de la seconde, les cases entrante et sortante sont (1,4) et (1,2) respectivement. Les deux solutions de base résultantes sont données dans la portion centrale et dans la portion de droite du tableau ci-dessus. La dernière solution est optimale et son coût total est égal à 415.
- (c) Le coût marginal de la case hors base (2,1) est nul; de plus, le cycle de changement associé est formé des cases (2,1), (1,1), (1,4) et (2,4); enfin, la valeur maximale de Δ est 2. On peut donc, sans affecter la valeur du coût total, reporter dans la case (2,1) une valeur Δ ne dépassant pas 2, à condition de modifier en conséquence les valeurs des cases de base du cycle. Le tableau ci-dessous donne les deux solutions optimales obtenues quand on pose $\Delta = 1$ et $\Delta = 2$.

	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
O1	14	-	-	3	18	13	-	-	4	18
O2	1	27	11	1	-	2	27	11	-	-
O3	-	-	-	25	-	-	-	-	25	-

9. Une solution initiale qui est optimale

- (a) Le tableau résultant est reproduit ci-dessous. (Les coûts marginaux, qui seront utilisés à la question suivante, ont été ajoutés.)

	D1	D2	D3	
O1	4	8	6	11
	20		5	25
O2	5	1	8	12
	15	15		30
O3	4	7	4	9
			20	20
	15	20	40	75

- (b) La solution trouvée à la question précédente est optimale, car les coûts marginaux des cases hors base sont tous positifs.
- (c) Le tableau résultant est reproduit ci-dessous. (Les coûts marginaux, qui seront utilisés à la question suivante, ont été ajoutés.)

	D1	D2	D3	
O1		8	6	1
	15	10		11
	10			25
O2	-5	5	8	12
	10		20	30
O3	-1	7	3	9
			20	20
	15	20	40	75

- (d) Il suffit d'effectuer les deux itérations, tel qu'indiqué dans l'énoncé. On constate, par exemple, que, dans la solution obtenue à la question précédente, le coût marginal négatif le plus élevé en valeur absolue se trouve dans la case hors base (2,1), qui de ce fait sera la case entrante de la 1^{re} itération...

10. Modification d'un coût unitaire

- (a) Le problème de transport considéré admet une seule solution optimale, car les coûts marginaux des cases hors base sont tous positifs.
- (b) La solution décrite dans l'énoncé serait optimale pour le problème modifié : seul le coût marginal de la case (2,1) serait affecté; il deviendrait égal à $1 + (14-11) = 4$. Le plan optimal resterait donc inchangé.
- (c) Le coût marginal de la case (2,1) devient négatif. On effectue une itération en prenant (2,1) comme case entrante. Dans le tableau résultant, le coût marginal de la case (1,4) est négatif : on effectue donc une autre itération, prenant cette fois (1,4) comme case entrante. Le nouveau tableau, qui est reproduit ci-dessous, est optimal.

	D1	D2	D3	D4	
O1	1 8	7 10	4 11	8	20
O2	5	5 6	5	6	45
O3	7	3	3 10	6 14	20
	25	18	17	25	85

- (d) Le plan optimal serait alors modifié, car il deviendrait rentable d'acheminer davantage d'unités de O2 à D2. Plus précisément, les coûts marginaux de la solution considérée dans l'énoncé seraient affectés et celui de la case (1,4) deviendrait négatif. On doit donc effectuer une itération, en prenant (2,1) comme case entrante. Le tableau résultant, qui est reproduit ci-dessous, est optimal.

	D1	D2	D3	D4	
O1	8	7 10	4 11	8	20
O2	5 11	1	5	6	45
O3	7	1 3	4 10	7 14	20
	25	18	17	25	85

- (e) Le coût marginal de la case (2,1) devient négatif : on effectue une itération en prenant (2,1) comme case entrante. Le tableau résultant, qui est reproduit ci-dessous, est optimal.

	D1	D2	D3	D4	
O1	8 20	6 10	9 11	5 8	20
O2	11 3	4 11	5 17	6 25	45
O3	7 2	3 18	9 10	12 14	20
	25	18	17	25	85

11. Problèmes non équilibrés

- (a) Il faut ajouter un entrepôt fictif dont la demande est de 50 unités.

	E1	E2	E3	E4	E5	Ef	
U1	7	66	6	10	6	0	100
U2	11	5	11	4	7	0	100
U3	8	8	7	12	5	0	100
	50	50	50	50	50	50	300

- (b) Il faut ajouter une usine fictive dont la capacité est de 50 unités.

	E1	E2	E3	E4	E5	
U1	8	2	5	7	9	100
U2	3	5	6	8	10	300
U3	7	6	3	5	4	150
Uf	0	0	0	0	0	50
	150	200	100	50	100	600

12. Modèle linéaire

- (a) Les variables de décision sont définies ainsi :

x_{ij} = nombre d'unités qui seront expédiées de l'origine O_i à la destination D_j .

L'objectif consiste à minimiser z , où

$$z = 8x_{11} + 6x_{12} + 11x_{13} + 5x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + 7x_{31} + 9x_{32} + 10x_{33}.$$

Les contraintes forment 3 groupes.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$$

$$x_{ij} \geq 0$$

tout (i, j) .

- (b) Les variables de décision sont définies ainsi :

x_{ij} = nombre d'unités qui seront expédiées de l'usine U_i à l'entrepôt E_j .

L'objectif consiste à minimiser z , où

$$z = 7x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} + 10x_{14} + 6x_{15} + 11x_{21} + 5x_{22} + \dots + 12x_{34} + 5x_{35}.$$

Les contraintes forment 3 groupes.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 100$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 100$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0$$

tout (i, j) .

13. La méthode des pénalités

- (a) Le tableau ci-dessous donne la solution initiale demandée. Les attributions ont été effectuées dans l'ordre suivant : (1,5), (3,4), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3) et (3,2).

Les coûts marginaux des cases hors base ont été reportés à la gauche des coûts unitaires. On observe que ces coûts marginaux sont tous positifs, ce qui permet de conclure que cette solution initiale est l'unique solution optimale du problème de transport considéré.

	D1	D2	D3	D4	D5						
U1	14	21	2	14	7	6	10	5	90	110	200
U2	6	12	11	6	9	12	16	20	115	35	150
U3	5	10	3	8	2	12	15	100	10	240	350
	100	125	125	240	110	700					

- (b) Le tableau ci-dessous donne la solution initiale demandée. Les attributions ont été effectuées dans l'ordre suivant : (3,4), (3,1), (1,3), (2,2), (3,5), (1,5) et (2,5).

Les coûts marginaux des cases hors base ont été reportés à la gauche des coûts unitaires. On observe que celui de la case (2,3) est négatif ; de plus, la valeur limite Δ qu'on peut donner à cette case est positive : il en résulte que la solution initiale représentée n'est pas optimale.

	D1	D2	D3	D4	D5					
U1	14	21	6	14	7	6	10	17	200	
			125				75			
U2	2	12		11	-4	6	5	12	20	150
			125				25			
U3		5	4	10	3	8		2	15	350
	100						240		10	
	100	125	125	240	110	700				

14. Construction d'une solution initiale : comparaison des trois méthodes

- (a) La portion gauche du tableau suivant décrit la solution initiale découlant de la méthode du coin nord-ouest. Le coût total de cette solution est égal à 3445.

	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
O1	70	50	-	-	-	120	-	-	-	75	45	-
O2	-	135	-	-	-	135	-	-	-	135	-	-
O3	-	135	45	60	70	65	45	60	70	110	-	60

- (b) La portion centrale du tableau suivant décrit la solution initiale découlant de la méthode des coûts minimaux. Le coût total de cette solution est égal à 3375.
- (c) La portion droite du tableau suivant décrit la solution initiale découlant de la méthode des pénalités. Le coût total de cette solution est égal à 3330.
- (d) Il suffit de vérifier que les coûts marginaux des cases hors base sont tous positifs ou nuls. Le tableau ci-dessous montre qu'il en est bien ainsi.

Case	(1,1)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,3)
Coût marginal	1	1	10	13	14	1

15. Problème dégénéré et méthode du coin nord-ouest

- (a) Le tableau ci-contre donne la solution initiale demandée. Lorsque deux rangées sont saturées simultanément, on a choisi la case où effectuer la prochaine attribution en appliquant le principe suivant : *toutes autres choses étant égales par ailleurs, une case dont le coût unitaire est moins élevé a priorité dans la base.*

	D1	D2	D3	D4
O1	70	30	-	-
O2	-	100	-	-
O3	-	0	40	60

égales par ailleurs, une case dont le coût unitaire est moins élevé a priorité dans la base. Le tableau ci-dessous décrit le tableau résultant de l'itération lorsque x_{24} est retenue comme variable sortante. Les coûts marginaux ont été calculés pour compléter l'itération.

	D1	D2	D3	D4	
O1	4 0	2 0	9 8	3 50	50
O2	16 24	6 50	3 40	1 8	90
O3	5 40	5 8	7 7	6 10	40
	40	50	40	50	180

- (c) La variable entrante est x_{32} ; le cycle de changement est formé des cases (3;2), (3;4), (2;4) et (2;2); la valeur maximale de Δ est 40. La case sortante est (3;4). Le tableau ci-dessous décrit le tableau résultant de l'itération. Les coûts marginaux ont été calculés pour compléter l'itération.

	D1	D2	D3	D4	
O1	4 30	3 8	4 8	3 10	40
O2	21 24	4 10	3 40	2 40	90
O3	2 6	5 40	3 7	3 6	40
	30	50	40	50	170

18. Bières Témiscouata Inc.

(a) Coût total = 14 700. Le tableau ci-dessous décrit la solution initiale demandée.

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	2	3	2	4	0	
	800	200				1000
U2	1	4	3	2	0	
		700	1200			1900
U3	3	2	2	3	0	
			800	1500	200	2500
	800	900	2000	1500	200	5400

(b) Coût total = 10 800. Le tableau ci-dessous décrit la solution initiale demandée.

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	2	3	2	4	0	
		400		400	200	1000
U2	1	4	3	2	0	
	800			1100		1900
U3	3	2	2	3	0	
		500	2000			2500
	800	900	2000	1500	200	5400

(c) Il s'agit d'augmenter de 2 les coûts unitaires des cases (3,1), (3,2), (3,3) et (3,4). Le tableau ci-dessous décrit la solution initiale demandée, dont le coût total est égal à 19 300.

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	2 800	3 200	2	4	0	1000
U2	1	4 700	3 1200	2	0	1900
U3	5	4	4 800	5 1500	0 200	2500
	800	900	2000	1500	200	5400

(d) Coût total = 15 000. Le tableau ci-dessous décrit la solution initiale demandée.

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	2	3	2 800	4	0 200	1000
U2	1 800	4	3	2 1100	0	1900
U3	5	4 900	4 1200	5 400	0	2500
	800	900	2000	1500	200	5400

- (e) On savait a priori que les solutions obtenues en questions (a) et (c) seraient les mêmes, car la méthode du coin nord-ouest ne tient pas compte des coûts unitaires. La valeur du coût total diffère cependant. Par contre, dans le cas de la méthode des coûts minimaux, on ne peut savoir a priori si les solutions initiales seront les mêmes ou non. Ici, les deux solutions diffèrent.
- (f) Il suffit d'effectuer une itération, en prenant (1,5) comme case entrante. Voici le tableau résultant, qui est optimal et dont le coût total est égal à 14 600. (Les coûts marginaux, qui seront utilisés à la question suivante, ont été ajoutés.)

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	0 2	1 3	1000		2 0	1000
U2	800		2 3	1100		1900
U3	1 5	900		400	200	2500
	800	900	2000	1500	200	5400

- (g) Le problème admet plusieurs solutions optimales, car la case hors base (1,1) admet un coût marginal nul et peut entrer dans la base et prendre des valeurs positives. Pour obtenir deux autres solutions optimales, il suffit de reporter dans la case (1,1) une valeur Δ ne dépassant pas 400, puis de modifier en conséquence les autres cases du cycle de changement.
- (h) Il suffit de remplacer le coût unitaire 5 de la case (3,5) par une valeur élevée, disons 99. On constate que la solution de la question (f) n'est plus optimale. Il faut effectuer deux itérations, dont les cases entrantes sont (1,2) et (3,1) respectivement. Voici la solution optimale, dont le coût total est 14 600.

	G1	G2	G3	G4	Gf	
U1	400 2	600		1000		1000
U2	400		1500		1900	1900
U3	5 1	900		200	2500	2500
	800	900	2000	1500	200	5400

19. Contexte : Livraisons anticipées et en retard

Le tableau ci-dessous donne les profits unitaires du problème de transport recherché. Comme l'offre totale de 180 unités excède la demande totale, qui est de 170 unités seulement, il faudra ajouter une colonne fictive, dont les profits unitaires seront tous nuls et dont la demande sera de 10 unités.

	S1	S2	S3	S4	Capacité
S0	40	36	32	28	50
S1	25	40	36	32	50
S2	-	25	40	36	30
S3	-	-	25	40	50
Demande	45	35	55	35	

Il s'agit d'un problème de maximisation. De plus, les traits représentent des attributions interdites. Il existe plusieurs façons de ramener ce problème au problème classique de transport : par exemple, on peut remplacer les profits unitaires par des manques à gagner et les tirets par des valeurs très grandes. Voici le tableau qu'on obtient ainsi.

	S1	S2	S3	S4	Fict.	Capacité
S0	0	4	8	12	0	50
S1	15	0	4	8	0	50
S2	500	15	0	4	0	30
S3	500	500	15	0	0	50
Demande	45	65	25	35	10	180

Voici un plan optimal :

- Semaine 1 : produire à pleine capacité; 5 lampes serviront à répondre à la demande de la semaine suivante.
- Semaine 2 : produire à pleine capacité; 20 lampes serviront à répondre à la demande de la semaine suivante.
- Semaine 3 : produire à pleine capacité, soit 30 lampes.
- Semaine 3 : produire 40 lampes, dont 5 serviront à répondre à la demande de la semaine précédente.

Ce plan assure à l'artisan un revenu net de 6 625 dollars :

$$\text{Revenu net} = \text{Revenu brut} - \text{Pénalités} = 170 \text{ u} \times 40 \text{ \$/u} - 125 \$ = 6\,800 \$ - 125 \$ = 6\,625 \$.$$