Chapitre 8. Le problème d'affectation - Solutions

3. La compagnie US-LTL

(a) Nombre de solutions admissibles = 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24.

(b) Le tableau suivant décrit les 24 solutions admissibles. La partie centrale indique quel client se voit attribuer chacun des terminus; à droite est donné le coût total *z* de cette solution.

N°	T1	T2	T3	T4	*z*	N°	T1	T2	T3	T4	*z*
1	1	2	3	4	64	13	3	1	2	4	54
2	1	2	4	3	53	14	3	1	4	2	50
3	1	3	2	4	55	15	3	2	1	4	58
4	1	3	4	2	51	16	3	2	4	1	86
5	1	4	2	3	53	17	3	4	1	2	54
6	1	4	3	2	60	18	3	4	2	1	86
7	2	1	3	4	48	19	4	1	2	3	45
8	2	1	4	3	37	20	4	1	3	2	52
9	2	3	1	4	43	21	4	2	1	3	49
10	2	3	4	1	71	22	4	2	3	1	88
11	2	4	1	3	41	23	4	3	1	2	47
12	2	4	3	1	80	24	4	3	2	1	79

(c) L'unique solution optimale est la solution n° 8, dont le coût total est de 37.

(d) La méthode gourmande sélectionne d'abord l'affectation associée au coût le moins élevé du tableau, soit T3-C4; ensuite, elle retient T2-C3, puis T1-C2 et enfin T4-C1. Le coût total *z* de cette solution est $z = 6 + 7 + 13 + 45 = 71$. Cette solution, qui porte le n° 10 dans la liste de la question (b), entraînerait des déplacements à lège bien plus importants que la solution optimale, car la dernière affectation correspond à une grande distance – en fait la plus élevée du tableau!

4. Réduction-ligne et réduction-colonne pour un PA_3

(a) L'opération de réduction-ligne consiste à retrancher de chaque coût d'une ligne la valeur minimale de la ligne : ici, ces minima sont 15, 21 et 10 respectivement. Le tableau résultant est donné ci-dessous. On en conclut que la valeur optimale z^* ne peut être inférieure à la somme des valeurs soustraites à chacune des lignes : $z^* \leq 15 + 21 + 10 = 46$.

	T1	**T2**	**T3**
E1	17	0	4
E2	45	23	0
E3	6	7	0

(b) L'opération de réduction-colonne consiste à retrancher de chaque coût d'une colonne la valeur minimale de la colonne : ici, ces minima sont 6, 0 et 0 respectivement. Le tableau résultant est donné ci-dessous. On en conclut que la valeur optimale z^* ne peut être inférieure à la somme des valeurs soustraites aux diverses rangées : $z^* \leq 46 + 6 + 0 + 0 = 52$.

	T1	**T2**	**T3**
E1	11	0	4
E2	39	23	0
E3	0	7	0

(c) Oui : la solution E1-T2, E2-T3 et E3-T1 est de coût réduit nul selon le tableau de la question (b); il s'agit donc d'une solution optimale. On vérifie que son coût total est égal à la borne inférieure 52 obtenue en (b) : $z^* = c_{12} + c_{23} + c_{31} = 15 + 21 + 16 = 52$.

5. Réduction-ligne et réduction-colonne pour un PA_4

(a) L'opération de réduction-ligne consiste à retrancher de chaque coût d'une ligne la valeur minimale de la ligne : ici, ces minima sont 1, 1, 7 et 4 respectivement. Le tableau résultant est donné ci-dessous. On en conclut que la valeur optimale z^* ne peut être inférieure à la somme des valeurs soustraites à chacune des lignes : $z^* \leq 1 + 1 + 7 + 4 = 13$.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
E1	3	1	2	0
E2	3	0	1	2
E3	1	0	1	2
E4	4	4	0	4

(b) L'opération de réduction-colonne consiste à retrancher de chaque coût d'une colonne la valeur minimale de la colonne : ici, ces minima sont 1, 0, 0 et 0 respectivement. Le tableau résultant est donné ci-dessous. On en conclut que la valeur optimale z^* ne peut être inférieure à la somme des valeurs soustraites aux diverses rangées : $z^* \leq 13 + 1 + 0 + 0 + 0 = 14$.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
E1	2	1	2	0
E2	2	0	1	2
E3	0	0	1	2
E4	3	4	0	4

(c) Oui : la solution E1-T4, E2-T2, E3-T1 et E4-T3 est de coût réduit nul selon le tableau de la question (b); il s'agit donc d'une solution optimale. On vérifie que son coût total est égal à la borne inférieure 14 obtenue en (b) : $z^* = c_{14} + c_{22} + c_{31} + c_{43} = 1 + 1 + 8 + 4 = 14$.

6. La méthode hongroise

(a) Les tableaux ci-après décrivent l'application de la méthode hongroise aux données de l'exercice. Le premier donne les coûts après la réduction-ligne et la réduction-colonne; les autres donnent les coûts après chacune des itérations. Les astérisques dans les marges indiquent quelles rangées doivent ou peuvent être biffées pour couvrir tous les zéros du tableau. Le passage d'un tableau au suivant se fait en retranchant de chaque nombre la somme des valeurs numériques apparaissant dans les marges de sa ligne et de sa colonne. Enfin, la valeur Cum correspond au total cumulatif des réductions effectuées jusque-là et fournit une borne inférieure à la valeur optimale z^*.

		*		*	*		
	2	0	9	0	4	2	Cum = 32
	13	12	7	0	7	2	
	5	8	7	0	1	2	
	6	13	4	4	0	2	
*	0	5	0	2	6	0	
	0	-2	0	-2	-2		

				*	*		
*	0	0	7	0	4	0	Cum = 34
	11	12	5	0	7	2	
	3	8	5	0	1	2	
	4	13	**2**	4	0	2	
*	0	7	0	4	8	0	
	0	0	0	-2	-2		

				*			
*	0	0	7	2	6	0	Cum = 36
	9	10	3	0	7	1	
	1	6	3	0	1	1	
*	2	11	0	4	0	0	
*	0	7	0	6	10	0	
	0	0	0	-1	0		

0	**0**	7	3	6	Cum = 37
8	9	2	**0**	6	
0	5	2	0	0	
2	11	0	5	**0**	
0	7	**0**	7	10	

Ainsi, les affectations A1-C2, A2-C4, A3-C1, A4-C5 et A5-C3 constituent une solution optimale de ce problème. On vérifie que le coût de cette solution est bien égal au total cumulatif 37 :

$$z^* = c_{12} + c_{24} + c_{31} + c_{45} + c_{53} = 8 + 4 + 14 + 4 + 7 = 37.$$

(b) Les tableaux ci-après décrivent l'application de la méthode hongroise aux données de l'exercice. Nous utilisons les mêmes conventions que dans la solution de la question (a).

		*	*			
*	0	1	2	0	0	Cum = 13
	3	0	1	2	1	
	1	0	1	2	1	
	4	4	0	4	1	
	0	-1	-1	0		

0	2	3	**0**
2	**0**	1	1
0	0	1	1
3	4	**0**	3

Cum = 14

Ainsi, les affectations E1-C4, E2-C2, E3-C1 et E4-C3 constituent une solution optimale, dont le coût total est de 14.

(c) Les tableaux ci-après décrivent l'application de la méthode hongroise aux données de l'exercice. Nous utilisons les mêmes conventions que dans la solution de la question (a).

		*	*	*		*	
	53	41	9	0	9	54	1
	56	70	0	67	61	67	1
	37	39	16	77	12	0	1
*	0	7	89	56	0	65	0
	1	0	0	45	28	0	1
	58	79	89	0	82	57	1
	0	-1	-1	-1	0	-1	

Cum = 117

				*			
	52	41	9	0	**8**	54	0
*	55	70	0	67	60	67	-8
*	36	39	16	77	11	0	-8
*	0	8	90	57	0	66	-8
*	0	0	0	45	27	0	-8
	57	79	89	0	81	57	0
	8	8	8	0	8	8	

Cum = 118

44	33	1	0	**0**	46
55	70	**0**	75	60	67
36	39	16	85	11	**0**
0	8	90	65	0	66
0	**0**	0	53	27	0
49	71	81	**0**	73	49

Cum = 126

Ainsi, les affectations R1-E5, R2-E3, R3-E6, R4-E1, R5-E2 et R6-E4 constituent une solution optimale, dont le coût total est de 126.

(d) Les tableaux ci-après décrivent l'application de la méthode hongroise aux données de l'exercice. Nous utilisons les mêmes conventions que dans la solution de la question (a).

		*	*				
*	0	2	5	4	1	0	0
*	2	4	3	0	0	1	0
	3	0	0	**1**	4	5	1
	4	0	3	1	1	2	1
	1	0	2	1	3	4	1
	1	0	8	2	6	4	1
	0	-1	-1	0	0	0	

Cum =42

0	3	6	4	1	**0**	Cum =44
2	5	4	0	**0**	1	
2	0	**0**	0	3	4	
3	0	3	**0**	0	1	
0	**0**	2	0	2	3	
0	0	8	1	5	3	

Ainsi, les affectations M1-T6, M2-T5, M3-T3, M4-T4, M5-T2 et M6-T1 constituent une solution optimale, dont le coût total est de 44.

7. Affectation d'employés à des tâches

(a) Nombre de solutions admissibles = 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120.

(b) Après les opérations de réduction-ligne et de réduction-colonne, on obtient le tableau suivant. On constate que les affectations E1-T5, E2-T2, E3-T3, E4-T4 et E5-T1 constituent une solution optimale, dont le coût total est de 13 $/h : $z^* = c_{15} + c_{22} + c_{33} + c_{44} + c_{51} = 3 + 3 + 4 + 2 + 1 = 13$.

0	5	5	2	0
0	0	1	3	3
0	0	0	2	3
0	0	2	0	0
0	1	1	4	4

(c) Il n'existe pas d'autre solution optimale.

8. Solution gourmande et solution optimale

(a) La 1^re^ affectation est associée à la plus petite valeur du tableau, soit le nombre 1 à l'intersection de la ligne E2 et de la colonne T3 : ainsi, l'employé 2 se verra attribuer la tâche 3. On biffe alors la ligne E2 et de la colonne T3. Pour la 2^e^ affectation, on a le choix entre E1-T2 et E3-T1, qui correspondent toutes deux à la valeur minimale non biffée. Convenons de retenir E1-T2. L'affectation subséquente sera E3-T1. La 4^e^ et dernière affectation est forcée; il s'agit de E4-T4. On obtient ainsi la solution : E2-T3, E1-T2, E3-T1 et E4-T4, dont le coût total est

$$z = c_{23} + c_{12} + c_{31} + c_{44} = 1 + 2 + 2 + 9 = 14.$$

(b) Les tableaux ci-après décrivent l'application de la méthode hongroise aux données du problème. Nous utilisons les mêmes conventions que dans la solution de la question (a) de l'exercice 6.

		*	*			
	2	0	7	**1**	1	Cum = 13
	4	6	0	2	1	
*	0	2	3	0	0	
	4	0	6	1	1	
	0	-1	-1	0		

1	**0**	7	0
3	6	**0**	1
0	3	4	0
3	0	6	**0**

Cum = 14

Ainsi, les affectations E1-T2, E2-T3, E3-T1 et E4-T4 constituent une solution optimale, dont le coût total est de 14. Noter qu'il s'agit de la solution trouvée en (a) en appliquant la méthode gourmande.

(c) Ce problème admet une autre solution optimale : E1-T4, E2-T3, E3-T1 et E4-T2.

(d) La méthode gourmande donne la même solution E2-T3, E1-T2, E3-T1 et E4-T4, car la 4^{e} et dernière affectation est forcée; cependant, le coût total de cette solution devient 15. Le problème modifié admet une seule solution optimale, de coût 14, formée des affectations E1-T4, E2-T3, E3-T1 et E4-T2. Les calculs de la méthode hongroise sont identiques, mais la valeur de la case (4;4) augmente de 1 unité dans tous les tableaux, de sorte que, dans le tableau final, E4-T4 est maintenant une affectation de coût réduit égal à 1 et ne peut donc faire partie d'une solution optimale.

Noter que, si $c_{44} = 9 + k$, où $k > 0$, la méthode gourmande donne une solution admissible de coût total $14 + k$, tandis que la méthode hongroise permet de trouver la solution optimale de coût total 14.

9. Camionneurs en quête de voyages

(a) On transforme d'abord le problème de maximisation en un problème équivalent de minimisation en remplaçant les préférences p_{ij} de l'énoncé par des coûts r_{ij} définis ainsi :

$$r_{ij} = p_{ij} - p_{33} = p_{ij} - 91.$$

On ajoute ensuite une ligne fictive C5. On obtient le PA$_5$ suivant.

14	3	37	11	32
50	1	26	52	24
42	23	0	4	24
21	24	2	25	10
0	0	0	0	0

On effectue ensuite les réductions-lignes et on obtient le tableau T0 suivant. (Les réductions-colonnes n'ont aucun effet ici, car chaque colonne contient un zéro.)

		*	*			
	11	0	34	8	29	4
	49	0	25	51	23	4
	42	23	0	**4**	24	4
	19	22	0	23	8	4
*	0	0	0	0	0	0
	0	-4	-4	0	0	

On applique la méthode hongroise à ce dernier tableau. Trois itérations sont nécessaires.

		*	*	*		
	7	0	34	4	25	4
	45	0	25	47	19	4
	38	23	0	0	20	4
	15	22	0	19	**4**	4
*	0	4	4	0	0	0
	0	-4	-4	-4	0	

		*				
	3	0	34	4	21	0
	41	0	25	47	15	0
*	34	23	0	0	16	-3
*	11	22	0	19	0	-3
*	0	8	8	4	0	-3
	3	0	3	3	3	

0	0	31	1	18
38	**0**	22	44	12
34	26	0	**0**	16
11	25	**0**	19	0
0	11	8	4	**0**

Les affectations C1-V1, C2-V2, C3-V4, C4-V3 et C5-V5 forment une solution optimale dont le coût total est

$$z = c_{11} + c_{22} + c_{34} + c_{43} + c_{55} = 77 + 90 + 87 + 89 + 0 = 343.$$

Noter que le voyage V5 ne se verra affecter aucun camionneur et ne sera pas effectué.

10. Réparations urgentes

On appliquera la procédure décrite en section 8.6. Dans un premier temps, on transforme le problème de maximisation en un problème équivalent de minimisation en remplaçant les profits p_{ij} de l’énoncé par des coûts r_{ij} définis ainsi :

$$r_{ij} = p_{ij} - p_{41} = p_{ij} - 270.$$

On ajoute ensuite des lignes fictives M6 et M7. On obtient le PA_7 suivant.

90	95	1000	1000	1000	50	70
70	1000	60	90	1000	1000	50
1000	45	70	1000	80	1000	1000
0	1000	1000	80	65	20	0
80	1000	1000	95	1000	30	70
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

On applique la méthode hongroise à ce dernier tableau. Trois itérations sont nécessaires. Les affectations M1-C7, M2-C3, M3-C2, M4-C1 et M5-C6 forment une solution optimale dont le coût total est

$$z = c_{17} + c_{23} + c_{32} + c_{41} + c_{56} + c_{64} + c_{75} = 200 + 210 + 225 + 270 + 240 + 0 + 0 = 1145.$$

Noter que les véhicules C4 et C5 ne seront pas réparés aujourd'hui.

11. Cocktails

La situation se présente comme un problème d'affectation dont les lignes correspondent aux invités et les colonnes aux cocktails. Le coût à l'intersection de la ligne *I* et de la colonne *J* est 1 si le cocktail *J* fait partie de la liste des préférés de l'invité *I* et * (interdit) sinon. Voici le tableau des coûts lorsque les affectations interdites se voient attribuer un coût de 99.

99	1	1	99	99	99	99
99	1	99	99	1	1	1
99	99	99	1	1	1	99
1	1	1	1	99	99	99
1	1	99	1	1	1	99
99	1	99	1	1	99	1

Une solution optimale est décrite dans le tableau ci-dessous.

Invité	A	B	C	D	E	F
Cocktail	G	T	S	D	W	B

12. Rallye

La situation se présente comme un problème d'affectation dont les lignes correspondent aux épreuves et les colonnes aux chauffeurs. Comme le nombre d'épreuves est inférieur au nombre de chauffeurs, on ajoutera 4 lignes fictives. Une solution optimale est décrite dans le tableau ci-dessous; l'équipe complétera les 4 épreuves en 28 minutes. Les chauffeurs B, E, G et H ne feront pas partie de l'équipe.

Épreuve	E1	E2	E3	E4
Chauffeur	C	A	F	D

13. Le vieillissement du whisky

La situation se présente comme un problème d'affectation PA_7 dont les lignes correspondent aux barriques disponibles et les colonnes aux livraisons. Convenons de noter de A à G les barriques disponibles, et de T à Z les livraisons. Convenons également que les âges des barriques, de même que les dates de livraisons sont donnés par le tableau suivant.

Barrique	A	B	C	D	E	F	G
Âge	1	2	4	4	4	4	5
Livraison	T	U	V	W	X	Y	Z
Date	1	1	1	2	3	3	1

Le tableau des «coûts» d'affectation est décrit ci-dessous. Par exemple, le «coût» c_{BW} est le prix de vente de la barrique B si elle est livrée dans 2 ans; comme B est présentement âgé de 2 ans, elle sera âgée de 4 ans au moment de la livraison et sera vendue 19$ le litre. Noter que les coûts d'entreposage représentent une dépense indépendante de la décision du grossiste et peuvent être négligés dans le calcul d'un plan optimal de livraison.

	T	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
A	15	15	15	18	19	19	20
B	18	18	18	19	20	20	20
C	20	20	20	20	20	20	20
D	20	20	20	20	20	20	20
E	20	20	20	20	20	20	20
F	20	20	20	20	20	20	20
G	20	20	20	20	20	20	20

Une solution optimale est décrite dans le tableau ci-dessous. Le revenu total sera de $200 \times 140 =$ 28 000 dollars, car toutes les barriques seront âgées de 5 ans au moment de leur livraison.

Barrique	A	B	C	D	E	F	G
Livraison	Z	X	T	U	V	W	Y

14. Des employés qui peuvent accomplir plusieurs tâches

(a) On obtient un PA_9 équilibré en ajoutant 3 lignes fictives. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est 224. Les tâches T5, T6 et T9 ne trouveront pas preneur.

Employé	A	B	C	D	E	F
Tâche	T1	T8	T3	T2	T4	T7

(b) On remplace les 3 lignes fictives du tableau de la question (a) par les 3 lignes suivantes de coûts : la 1re est identique à la ligne de A; les coûts de la 2e sont calqués sur ceux de D; enfin, les coûts de la 3e et dernière coïncident avec ceux de F. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est 32 + 35 + 40 + 70 + 32 + 40 + 25 + 50 + 40 = 364.

Employé	A	B	C	D	E	F
Tâche	T1, T8	T9	T5	T2, T6	T4	T3, T7

(c) Il s'agirait de faire exécuter la tâche Tj par l'employé qui est associé à la valeur minimale de la colonne Tj. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est 32 + 25 + 50 + 25 + 30 + 30 + 25 + 25 + 40 = 282. On notera que les employés C et D resteraient inoccupés selon cette solution, tandis que B devrait accomplir 4 tâches.

Tâche	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
Employé	A	A	F	E	B	B	E	B	B

15. Problème avec conditions sur les affectations

(a) Il s'agit d'un PA_5 équilibré. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est $z = 6 + 5 + 3 + 4 + 7 = 25$.

Chauffeur	A	B	C	D	E
Voyage	e	a	c	d	b

(b) Il s'agit de remplacer les préférences p_{ij} de l'énoncé par des coûts r_{ij} définis ainsi : $r_{ij} = p_{ij} - p_{11} = p_{ij} - 10$. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le total des préférences est $z = 10 + 9 + 7 + 6 + 10 = 42$.

Chauffeur	A	B	C	D	E
Voyage	a	b	d	c	e

(c) On reprend le tableau des coûts de la question (a), mais on pose $c_{Ae} = 100$. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est $z = 26$.

Chauffeur	A	B	C	D	E
Voyage	c	a	b	e	d

(d) On reprend le tableau des coûts de la question (a), mais on pose $c_{Ea} = -100$. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale dont le coût total est $z = 6 + 7 + 3 + 2 + 8 = 26$.

Chauffeur	A	B	C	D	E
Voyage	e	d	c	b	a

16. Modèle linéaire

(a) Les variables de décision sont définies ainsi :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si l'employé E}i \text{ est affecté à la tâche T}j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objectif consiste à minimiser z, où

$$z = 32\, x_{11} + 15\, x_{12} + 19\, x_{13} + 66\, x_{21} + 44\, x_{22} + 21\, x_{23} + 16\, x_{31} + 17\, x_{32} + 10\, x_{33}\,.$$

Les contraintes forment 3 groupes.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\} \qquad \text{tout } (i, j).$$

(b) Une solution optimale de ce modèle linéaire est obtenu en posant :

$$x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1 \quad \text{et} \quad \text{toutes les autres variables sont nulles.}$$

Le coût total minimal est $z = 52$. Le tableau ci-dessous décrit la solution optimale.

Employé	E1	E2	E3
Tâche	T2	T3	T1