9A Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Probabilités conditionnelles

Tel que mentionné à la section 9.5, les probabilités utilisées dans les arbres de décision sont des probabilités conditionnelles.

Pour illustrer cette notion, considérons un jeu ordinaire de 52 cartes. Et convenons de noter F et B les deux événements suivants:

F : tirer une figure (roi, dame ou valet)

B : tirer une carte qui bat un dix (figure ou as) *et* qui est noire (pique ou trèfle).

Si l'on tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes, les chances de tirer une figure sont de 12 sur 52: $P(F) = 12/52$. Dans le contexte du théorème de Bayes, on parlera de **probabilité *a priori***. Supposons que, sans voir la carte tirée, on apprenne que l'événement B s'est réalisé. Cette information restreint la carte tirée à un ensemble de 8 cartes, dont 6 sont des figures. On peut donc affirmer que, *compte tenu de l'information disponible*, les chances que la carte tirée soit une figure sont maintenant de 6 sur 8. Ainsi, savoir que B s'est réalisé a influencé la probabilité assignée à l'événement F; la probabilité révisée sera dite **probabilité *a posteriori*** et sera notée $P(F\,|\,B)$, ce qui se lit «P de F étant donné B». D'après les commentaires qui précèdent,

$$P(F\,|\,B) \;=\; \frac{6}{8} \;=\; \frac{6/52}{8/52} \;=\; \frac{P(B \text{ et } F)}{P(B)} \;.$$

Cette dernière expression est généralement prise comme définition de probabilité conditionnelle.

Définition. Soit B, un événement de probabilité non nulle. La **probabilité conditionnelle** $P(A\,|\,B)$ qu'un événement A se produise étant donné la réalisation de B se définit ainsi:

$$P(A\,|\,B) \;=\; \frac{P(B \text{ et } A)}{P(B)} \;.$$

Le théorème de Bayes

Il arrive dans certains problèmes pratiques qu'on ait besoin de probabilités *a posteriori* du type $P(A_h\,|\,B)$, alors que, à partir de considérations théoriques ou de données historiques, on connaisse plutôt les probabilités *a priori* $P(A_h)$ et les probabilités conditionnelles $P(B\,|\,A_h)$. Le théorème de Bayes indique comment obtenir les probabilités désirées sous certaines hypothèses sur les événements A_h.

Pour illustrer ce résultat, nous utiliserons le tirage d'une carte d'un jeu de 52. Et nous considérerons les événements suivants:

R : tirer une carte rouge (cœur ou carreau)

P : tirer un pique

T : tirer un trèfle

D : tirer une carte appartenant à l'ensemble {2♥, 2♦, 2♠, 3♥, 7♥}.

Le tableau ci-dessous donne les effectifs de ces événements. Pour obtenir leur probabilité, il suffit de diviser l'effectif par 52, le nombre total de cartes dans un jeu. *A priori*, les probabilités de tirer une carte rouge, un pique ou un trèfle sont de ½, ¼ et ¼ respectivement. Si l'on sait que la carte tirée appartient à l'ensemble D, les probabilités *a posteriori* sont égales à 4/5, 1/5 et 0.

	R	P	T	Effectif
D	4	1	0	5
D '	22	12	13	47
Effectif	26	13	13	52

Dans cet exemple très simple, on connaît tout et il n'est pas nécessaire de recourir à une formule pour obtenir les probabilités qui nous intéressent. Mais, supposons que seules les probabilités *a priori*

$$P(R) = 26/52 \quad \text{et} \quad P(P) = 13/52 \quad \text{et} \quad P(T) = 13/52$$

ainsi que les probabilités conditionnelles

$$P(D \mid R) = 4/26 \quad \text{et} \quad P(D \mid P) = 1/13 \quad \text{et} \quad P(D \mid T) = 0$$

soient connues. Et indiquons comment calculer la probabilité *a posteriori* $P(R \mid D)$. D'après la définition de probabilité conditionnelle (appliquée deux fois),

$$P(R \mid D) \;=\; \frac{P(D \text{ et } R)}{P(D)} \;=\; \frac{P(R \text{ et } D)}{P(D)} \;=\; \frac{P(R) \times P(D \mid R)}{P(D)} \,. \qquad (*)$$

Les deux facteurs du numérateur sont connus par hypothèse : $P(R) = 26/52$ et $P(D \mid R) = 4/26$. Il reste à calculer le dénominateur.

Notons d'abord que les événements R, P et T constituent une **partition** de l'ensemble fondamental de tous les résultats possibles du tirage, en ce sens que la carte tirée appartiendra nécessairement à un et à un seul de ces trois ensembles (en effet, toute carte est soit rouge, soit un pique, soit un trèfle). Il en résulte que

$$P(D) \;=\; P(D \text{ et } R) + P(D \text{ et } P) + P(D \text{ et } T).$$

Enfin, appliquant à nouveau la formule définissant les probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(D) \;&=\; P(R) \times P(D \mid R) + P(P) \times P(D \mid P) + P(T) \times P(D \mid T) \\ &=\; \left(\frac{26}{52} \times \frac{4}{26}\right) + \left(\frac{13}{52} \times \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{13}{52} \times \frac{0}{13}\right) \;=\; \frac{1}{52}\,(4 + 1 + 0) \;=\; \frac{5}{52}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(R \mid D) \;=\; \frac{(26/52) \times (4/26)}{5/52} \;=\; \frac{4/52}{5/52} \;=\; \frac{4}{5} \,.$$

On notera que le dénominateur P(D) de la formule (*) est la somme de trois termes analogues et que le numérateur est l'un de ces termes, celui associé à l'événement R. Le théorème de Bayes formalise et systématise les calculs que nous venons tout juste d'effectuer pour notre exemple inspiré des jeux de cartes.

Théorème de Bayes. Soient B, un événement de probabilité non nulle ; et $A_1, \ldots, A_p$, des événements qui forment une partition de l'ensemble fondamental de tous les résultats possibles. Alors,

$$P(A_h \mid B) = P(A_h) \times P(B \mid A_h) / P(B), \quad \text{où } P(B) = \textstyle\sum_i P(A_i) \times P(B \mid A_i).$$

Étude de marché et probabilités *a posteriori*

À titre de deuxième exemple, nous calculons les probabilités *a posteriori* dans le problème de Boutons Mosaïque qui est traité à la section 9.6. Rappelons que les événements GS, RM et Éc forment une partition de l'ensemble fondamental. Et appliquons le théorème de Bayes en prenant pour B l'événement PN (indifférence des grossistes). D'abord, le dénominateur P(PN) de la formule se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} P(PN) &= P(GS) \times P(PN \mid GS) + P(RM) \times P(PN \mid RM) + P(\text{Éc}) \times P(PN \mid \text{Éc}) \\ &= (0{,}45 \times 0{,}4) + (0{,}35 \times 0{,}4) + (0{,}20 \times 0{,}9) \\ &= 0{,}50. \end{aligned}$$

Puis, les probabilités *a posteriori* en cas de réponse négative s'obtiennent en divisant par P(PN) le terme correspondant dans la première des équations ci-dessus :

$$P(GS \mid PN) = P(GS) \times P(PN \mid GS) / P(PN) = (0{,}45 \times 0{,}4) / 0{,}5 = 0{,}36$$

$$P(RM \mid PN) = P(RM) \times P(PN \mid RM) / P(PN) = (0{,}35 \times 0{,}4) / 0{,}5 = 0{,}28$$

$$P(\text{Éc} \mid PN) = P(\text{Éc}) \times P(PN \mid \text{Éc}) / P(PN) = (0{,}20 \times 0{,}9) / 0{,}5 = 0{,}36.$$

On obtient de même la valeur de P(PP), ainsi que les probabilités *a posteriori* en cas de réponse positive.

On retrouve ces probabilités de façon plus visuelle à l'aide des trois figures de la page suivante. La première, qui contient les probabilités *a priori* et les probabilités conditionnelles, est un simple rappel des données du problème. La seconde donne les probabilités conjointes, qui s'obtiennent en multipliant probabilités *a priori* et probabilités conditionnelles. Par exemple,

$$P(GS \text{ et } PP) = P(GS) \times P(PP \mid GS) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$$

$$P(\text{Éc et } PN) = P(\text{Éc}) \times P(PN \mid \text{Éc}) = 0{,}20 \times 0{,}9 = 0{,}18.$$

Enfin, la troisième donne les probabilités *a posteriori*. Considérons, à titre d'exemple, la branche PN de cette figure. Tout d'abord, la probabilité marginale P(PN) est obtenue en additionnant les probabilités des trois événements (notés en bleu sur la figure) « GS et PN », « RM et PN » et « Éc et PN », qui forment une partition de l'événement PN :

$$P(PN) = P(GS \text{ et } PN) + P(RM \text{ et } PN) + P(\text{Éc et } PN) = 0{,}18 + 0{,}14 + 0{,}18 = 0{,}50.$$

Les probabilités *a posteriori* correspondent à la proportion de la somme ci-dessus qui provient de chacun des termes :

$$P(GS \mid PN) = P(GS \text{ et } PN) / P(PN) = 0{,}18 / 0{,}50 = 0{,}36$$

$$P(RM \mid PN) = P(RM \text{ et } PN) / P(PN) = 0{,}14 / 0{,}50 = 0{,}28$$

$$P(\text{Éc} \mid PN) = P(\text{Éc et } PN) / P(PN) = 0{,}18 / 0{,}50 = 0{,}36.$$

Figure 1 Le problème de Boutons Mosaïque – Les données

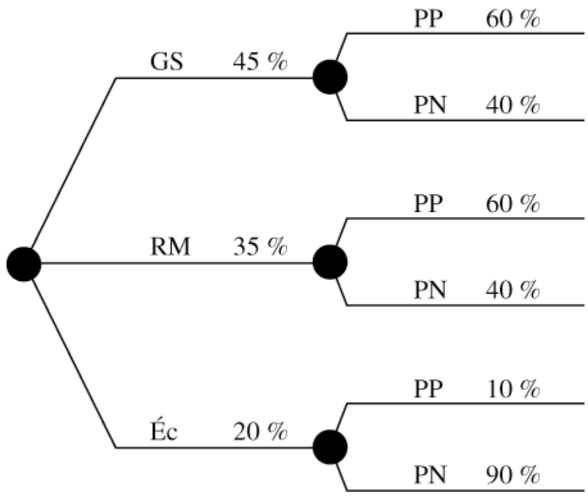


Figure 2 Le problème de Boutons Mosaïque – Les probabilités conjointes

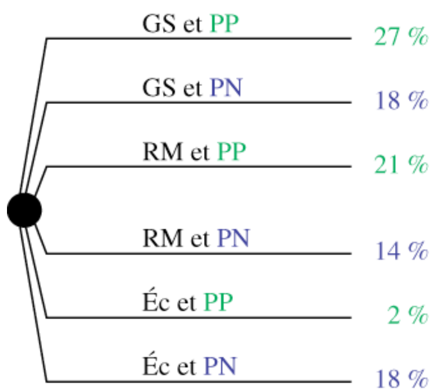
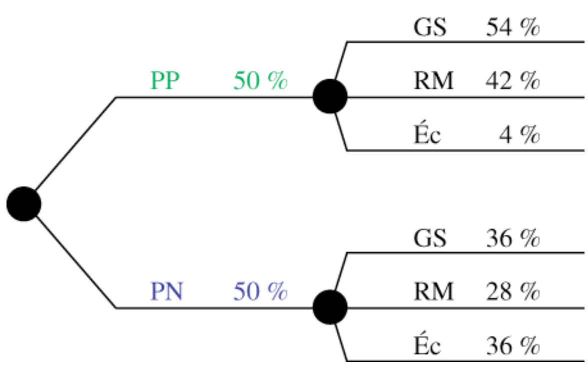


Figure 3 Le problème de Boutons Mosaïque – Les probabilités *a posteriori*



Le théorème de Bayes et l'intuition

Tversky et Kahneman[1] présentent une application intéressante du théorème de Bayes. Décrivons d'abord le problème traité par ces auteurs.

Dans une ville, deux compagnies opèrent des taxis : les Verts, qui représentent 85% de la flotte totale, et les Bleus, qui ont les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Quelle est la probabilité que le taxi responsable soit effectivement un Bleu, sachant que la fiabilité des témoignages dans des conditions analogues à celles prévalant lors de l'accident est évaluée à 80% (les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20%) ?

Avant de résoudre le problème, mentionnons que les auteurs ont demandé à plusieurs sujets d'évaluer intuitivement cette probabilité. La réponse médiane et modale est 80%. Ainsi, les gens, spontanément, sont prêts à donner une crédibilité élevée à la parole du témoin. Qu'en est-il en réalité ?

Notons B et PB les événements suivants :

B : Le taxi est un Bleu

PB : Le témoin affirme que le taxi est un Bleu.

Définissons de même des événements V et PV. D'après l'énoncé du problème,

$$P(B) = 0{,}15 \quad \text{et} \quad P(V) = 0{,}85$$

$$P(PB \mid B) = P(PV \mid V) = 0{,}80 \quad \text{et} \quad P(PB \mid V) = P(PV \mid B) = 0{,}20.$$

On cherche la valeur de $P(B \mid PB)$. Ici, les événements B et V forment une partition de l'ensemble fondamental. D'après la formule de Bayes,

$$P(PB) = P(B) \times P(PB \mid B) + P(V) \times P(PB \mid V) = (0{,}15 \times 0{,}8) + (0{,}85 \times 0{,}2) = 0{,}29$$

$$P(B \mid PB) = P(B) \times P(PB \mid B) \,/\, P(PB) = (0{,}15 \times 0{,}8) \,/\, 0{,}29 = 0{,}414.$$

On notera que le profane surestime considérablement la valeur de la parole du témoin. Les auteurs tirent des conclusions intéressantes de cette expérience. Quant à nous, c'est la nécessité de recourir à un outil abstrait qui retient notre attention : dans l'évaluation des probabilités conditionnelles, l'intuition ne suffit pas ; l'utilisation d'une approche formelle s'impose pour ne pas errer.

[1] Voir Tversky A. et Kahneman D., «Causal schemas in judgment under uncertainty», dans Fishbein, M. (ed.), *Progress in Social Psychology*, Lawrence Erlbaum, 1980. Cité dans Hogarth R., *Judgment and Choice*, Wiley, 1980, p. 38. Voir aussi Kahneman D. et Tversky A., «On prediction and judgment», *ORI Research Monograph*, vol. 12, 1972; Eber N. et Willinger M., *L'économie expérimentale*, La Découverte, (collection *Repères*, n° 423), 2005.