# Chapitre 9 – Solutions des exercices de révision

## Section 9.3 Équivalent-certain et critères de décision non probabilistes

### 1. Les critères non probabilistes

(a) Le tableau ci-dessous donne les équivalents-certains dans le contexte du critère optimiste de profit maximax. La meilleure option est O1.

| Option | Résultats (profit en k$) | | | | (a) Maximax | | (b) Maximin | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | E1 | E2 | E3 | E4 | ÉC | Décision | ÉC | Décision |
| **O1** | 200 | 125 | 100 | -50 | 200 | **O1** | -50 | |
| **O2** | 150 | -50 | 20 | 60 | 150 | | -50 | |
| **O3** | -45 | 80 | 35 | 110 | 110 | | -45 | **O3** |

(b) Le tableau ci-dessus donne les équivalents-certains dans le contexte du critère pessimiste de profit maximin. La meilleure option est O3.

(c) Le tableau ci-dessous donne les regrets.

| Option | (c) Regrets | | | | (d) Minimax | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E1 | E2 | E3 | E4 | ÉC | Décision |
| **O1** | 0 | 0 | 0 | 160 | 160 | **O1** |
| **O2** | 50 | 175 | 80 | 50 | 175 | |
| **O3** | 245 | 45 | 65 | 0 | 245 | |

(d) Le tableau ci-dessus donne les équivalents-certains dans le contexte du critère de regret minimax. La meilleure option est O1.

**Note**. Le détail des calculs des trois exercices de cette section ainsi que des exercices 1 des sections 9.4 et 9.5, se trouve dans le fichier Critères.xlsx, qui est disponible sur le site.

### 2. Les critères optimiste et pessimiste dans un contexte de minimisation.

(a) Dans un contexte de coût, le meilleur résultat est le moins élevé et le critère optimiste définit l'équivalent-certain d'une option comme le minimum des résultats de la ligne. Le tableau ci-dessous donne ces équivalents-certains. Un décideur optimiste serait indifférent entre O1 et O3.

| Option | Résultats conditionnels (coût en k$) | | | | (a) Optimiste | | (b) Pessimiste | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | E1 | E2 | E3 | E4 | ÉC | Décision | ÉC | Décision |
| **O1** | 40 | 50 | 90 | 10 | 10 | O1 | 90 | |
| **O2** | 80 | 50 | 40 | 40 | 40 | | 80 | O2 |
| **O3** | 10 | 50 | 30 | 90 | 10 | O3 | 90 | |

(b) Dans un contexte de coût, le pire résultat est le plus élevé. Le critère pessimiste définit ici l'équivalent-certain d'une option comme le maximum des résultats de la ligne. Le tableau ci-dessus donne ces équivalents-certains. Un décideur pessimiste retiendrait l'option O2.

(c) Dans un contexte de coût, le regret pour une combinaison O*i*–E*j* est l'écart entre le résultat O*i*–E*j* et le meilleur résultat associé à E*j*, soit le moins élevé de la colonne E*j*. Par exemple,

$$(\textit{regret pour } \mathrm{O1–E1}) = 40 - \min\{40; 80; 10\} = 40 - 10 = 30.$$

Le tableau ci-dessous donne les regrets pour ce problème.

| Option | (c) Regrets | | | | (d) Minimax | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E1 | E2 | E3 | E4 | ÉC | Décision |
| **O1** | 30 | 0 | 60 | 0 | 60 | **O1** |
| **O2** | 70 | 0 | 10 | 30 | 70 | |
| **O3** | 0 | 0 | 0 | 80 | 80 | |

(d) Le tableau ci-dessus donne les équivalents-certains dans le contexte du critère de regret minimax. La meilleure option est O1.

## 3. Le critère de regret minimax.

Le tableau des regrets est donné ci-dessous. On constate que, selon le critère de regret minimax, la meilleure option est O2.

| Option | Résultats conditionnels | | | Regrets | | | Minimax | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | E1 | E2 | E3 | E1 | E2 | E3 | ÉC | Décision |
| **O1** | 901 | 0 | 0 | 0 | 900 | 1 | 900 | |
| **O2** | 900 | 900 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **O2** |
| **O3** | 1 | 9 | 1 | 900 | 891 | 0 | 900 | |

## Section 9.4 Le critère de Bayes

### 1. Le critère du meilleur résultat espéré.

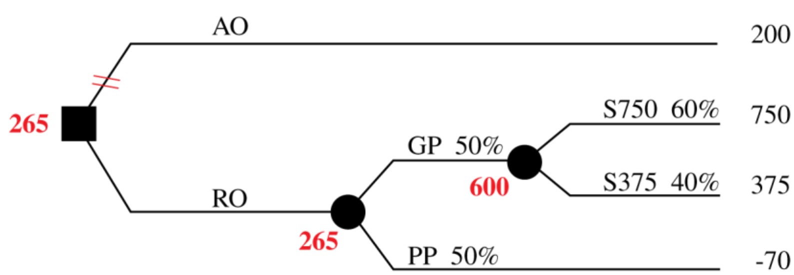
(a) Le tableau ci-dessous donne les équivalents-certains des différentes options.

| **Option** | **O1** | **O2** | **O3** |
|---|---|---|---|
| **ÉC** | 93,75 | 23 | 53,75 |

(b) La meilleure option selon le critère de Bayes est O1.

### 2. L'expert rapatrié prématurément.

Un arbre de décision représentant le problème de l'expert est donné ci-dessous. Il devrait refuser l'offre.




Légende

AO : L'expert accepte l'offre
RO : L'expert refuse l'offre
GP : L'expert gagne le procès
PP : L'expert perd le procès
S750 : Le juge accorde 750 k$
S375 : Le juge accorde 375 k$

## Section 9.5 La valeur espérée d'une information parfaite

### 1. La VEIP dans le cadre d’un tableau sans contexte.

Le tableau ci-dessous donne les décisions selon la prédiction concernant l’issue E*i*.

| Prédiction | Prob. | Décision | Résultat |
|---|---|---|---|
| **PE1** | 15% | O1 | 200 |
| **PE2** | 35% | O1 | 125 |
| **PE3** | 30% | O1 | 100 |
| **PE4** | 20% | O3 | 110 |

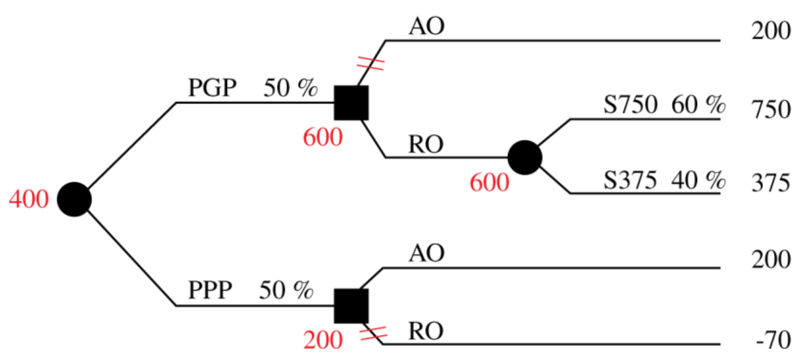
La valeur VEIP d’une information parfaite concernant l’issue E*i* est de 32 k$ :

$$\text{PEC} = (0{,}15 \times 200) + (0{,}35 \times 125) + (0{,}30 \times 100) + (0{,}20 \times 110) = 125{,}75$$

$$\text{VEIP} = 125{,}75 - 93{,}75 = 32.$$

### 2. La VEIP et l’expert rapatrié prématurément.

L’arbre de décision ci-dessous représente le problème de l’expert en présence d’une information parfaite concernant le fait pour l’expert de gagner ou de perdre le procès.




Légende

PGP : L’information obtenue prédit que l’expert va gagner le procès
PPP : L’information obtenue prédit que l’expert va perdre le procès

La valeur VEIP de l’information parfaite est de 135 k$ :

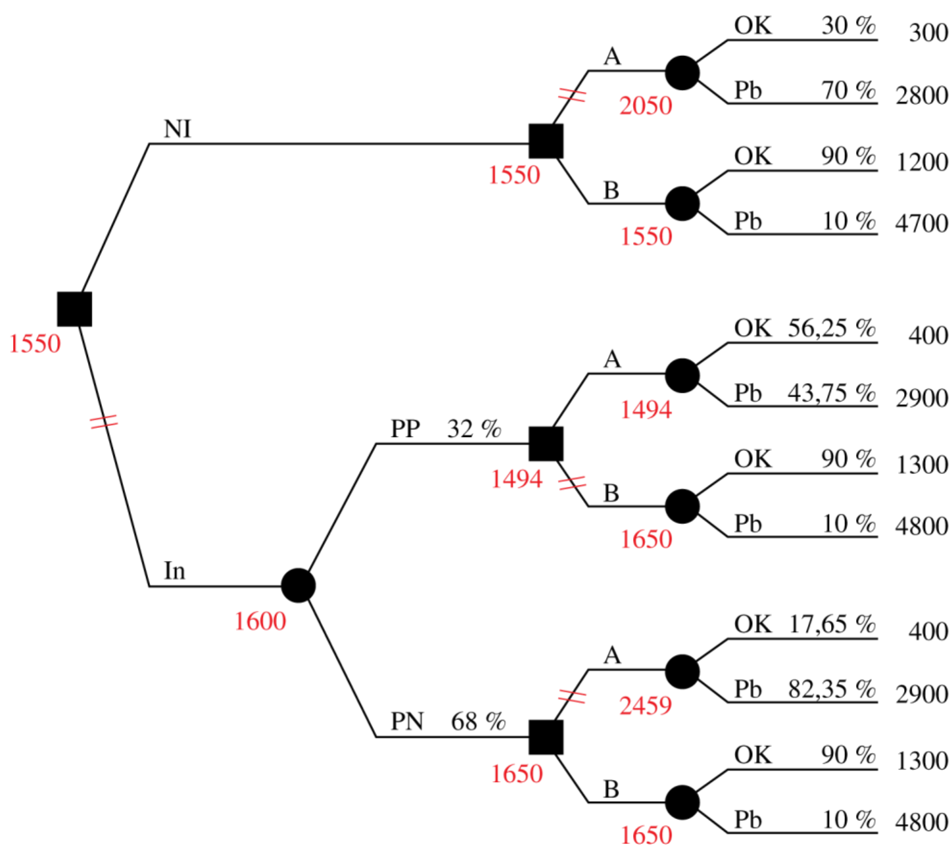
$$\text{VEIP} = 400 - 265 = 135.$$

## Section 9.6 Décisions séquentielles

### 1. L'achat d'une voiture par un camelot.

L'arbre de décision ci-dessous représente le problème du camelot. Les résultats conditionnels représentent le coût net (en $) pour le camelot. Par exemple, celui de la feuille In–PP–A–OK a été calculé comme suit (les détails pour les résultats des autres feuilles se trouvent dans la feuille 9.6.1 du fichier Camelot.xlsx, qui est disponible sur le site) :

$$\text{coût(In–PP–A–OK)} = 100 + 2\,800 - 2\,500 = 400.$$




Légende

NI : Ne pas faire inspecter la voiture
In : Faire inspecter la voiture
OK : La voiture va durer un an
Pb : La voiture aura des problèmes et ne va pas durer un an
PP : Le mécanicien prédit que la voiture va durer un an (prédiction positive)
PN : Le mécanicien prédit que la voiture ne va pas durer un an (prédiction négative)

Les probabilités *a posteriori* ont été obtenues à l'aide de la formule de Bayes. Par exemple (voir aussi la feuille 9.6.1 du fichier Camelot.xlsx),

$$P(PP) = P(OK) \times P(PP\,|\,OK) + P(Pb) \times P(PP\,|\,Pb) = (0{,}3 \times 0{,}6) + (0{,}7 \times 0{,}2) = 0{,}32$$

$$P(OK\,|\,PP) = P(OK) \times P(PP\,|\,OK) / P(PP) = (0{,}3 \times 0{,}6) / 0{,}32 = 0{,}5625.$$

La stratégie optimale, selon le critère de Bayes, consiste à ne pas faire d'inspection et à acheter la voiture B.

La valeur espérée VEIn de l'opinion du mécanicien à propos de la voiture A est l'écart entre les coûts espérés sans et avec l'information découlant de l'inspection. Le premier terme est l'équivalent-certain de la branche NI et le second celui de la branche In dont on a déduit le coût de l'inspection. Par conséquent,

VEIn = (Coût espéré *sans* l'info) – (Coût espéré *avec* l'info)

VEIn = 1 550 – (1 600 – 100) = 50.

Ainsi, l'opinion du mécanicien vaut 50 $, ce qui est inférieur à son coût. C'est pourquoi la stratégie optimale ne recommande pas de rechercher cette opinion.

**Note**. La valeur espérée VEI d'une information se définit comme l'écart entre les équivalents-certains avec et sans l'information, mais que l'ordre des termes change selon qu'il s'agit d'un problème de maximisation ou de minimisation :

Problème de max : VEI = (ÉC *avec* l'info) – (ÉC *sans* l'info)

Problème de min : VEI = (ÉC *sans* l'info) – (ÉC *avec* l'info).

La règle ici est que le premier terme correspond toujours à la valeur la plus élevée, de façon à ce que la valeur espérée VEI de l'information soit non négative dans les deux cas.

## 2. Quelle quantité acheter?

(a) Un arbre de décision résumé est donné à la page suivante (on trouvera à la page 8 le détail de deux des quatre branches, soit NÉ et Ét – PS). Voici deux exemples de calculs de résultats conditionnels (ces derniers sont exprimés en milliers de dollars).

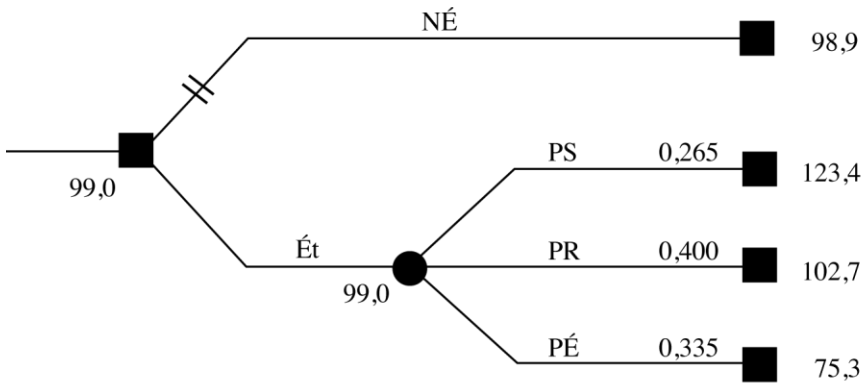
* Feuille Ét – PS – A4 – D7 : la chaîne ne pourra répondre à la demande et vendra 4000 chemisiers, qui lui reviendront à 27 $ l'unité.

Résultat = **(** 4000(45 – 27) – 2200 **)** / 1000 = 69,8.

* Feuille Ét – PS – A8 – D6 : la chaîne vendra 6000 chemisiers au prix de 45 $/u et soldera les 2000 invendus à 15 $/u.

Résultat = **(** (6000 × 45) + (2000 × 15) – (8000 × 25,30) – 2200 **)** / 1000 = 95,4.

**Note**. L'option de ne pas acheter de chemisiers est exclue *a priori* et n'apparaît pas dans l'arbre, car le revenu net est positif, même dans le pire des cas. Par exemple, si l'acheteur fixe sa commande à 8000 unités et que la demande n'est que de 4000 unités, le revenu net est de 37,6 k$ ou de 35,4 k$ selon qu'un «focus group» est organisé ou non.

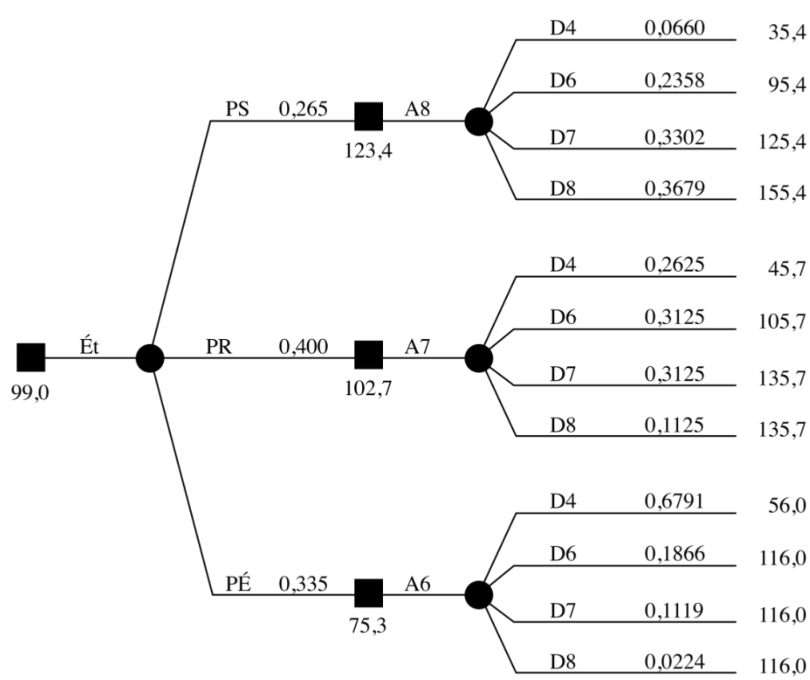


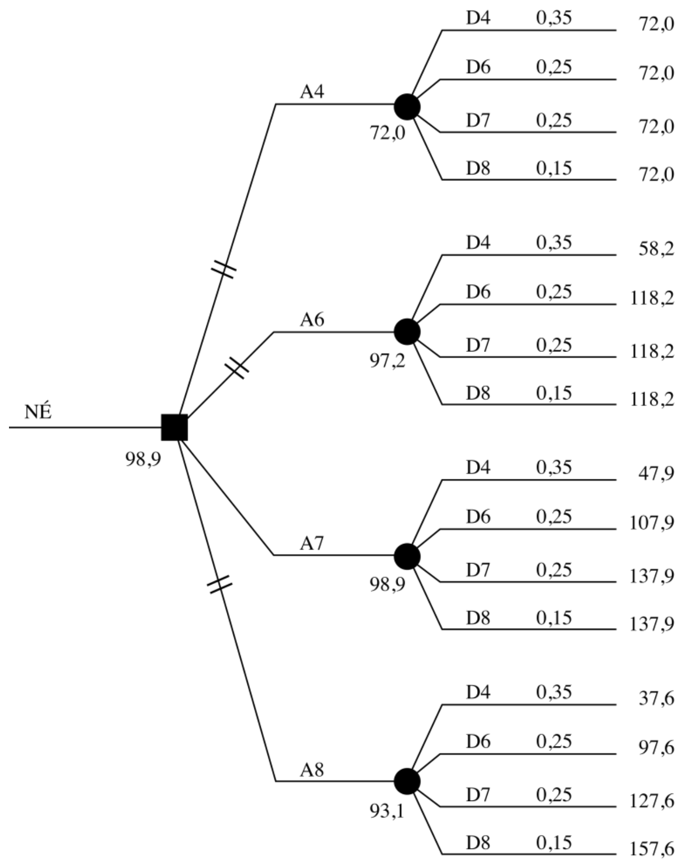

Les branches Ét – PR et Ét – PÉ sont semblables à Ét – PS: les résultats conditionnels des feuilles sont les mêmes; seuls changent les probabilités *a posteriori* et les équivalents-certains. Voici d'ailleurs les équivalents-certains des différents nœuds d'événements, ainsi que les décisions optimales associées à chacune des quatre branches.

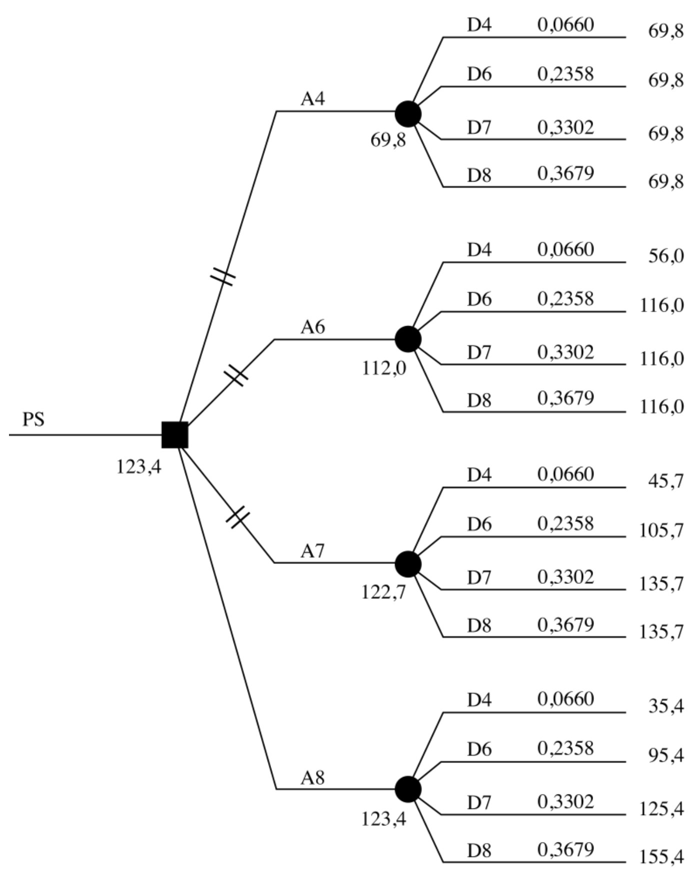
| Branche | A4 | A6 | A7 | A8 | Décision |
|---|---|---|---|---|---|
| **NÉ** | 72,0 | 97,2 | 98,9 | 93,1 | A7 |
| **Ét – PS** | 69,8 | 112,0 | 122,7 | 123,4 | A8 |
| **Ét – PR** | 69,8 | 100,3 | 102,7 | 95,8 | A7 |
| **Ét – PÉ** | 69,8 | 75,3 | 69,0 | 59,4 | A6 |

L'acheteur devrait tenir le focus group et décider de la taille de sa commande en fonction de la prévision de ce groupe. Le revenu espéré net est de 99 000 $. La stratégie optimale est décrite à la question (b).

(b) Voici l'arbre de stratégie pour la chaîne.




NÉ
98,9
A4
72,0
D4 0,35 72,0
D6 0,25 72,0
D7 0,25 72,0
D8 0,15 72,0
A6
97,2
D4 0,35 58,2
D6 0,25 118,2
D7 0,25 118,2
D8 0,15 118,2
A7
98,9
D4 0,35 47,9
D6 0,25 107,9
D7 0,25 137,9
D8 0,15 137,9
A8
93,1
D4 0,35 37,6
D6 0,25 97,6
D7 0,25 127,6
D8 0,15 157,6


PS
123,4
A4
69,8
D4 0,0660 69,8
D6 0,2358 69,8
D7 0,3302 69,8
D8 0,3679 69,8
A6
112,0
D4 0,0660 56,0
D6 0,2358 116,0
D7 0,3302 116,0
D8 0,3679 116,0
A7
122,7
D4 0,0660 45,7
D6 0,2358 105,7
D7 0,3302 135,7
D8 0,3679 135,7
A8
123,4
D4 0,0660 35,4
D6 0,2358 95,4
D7 0,3302 125,4
D8 0,3679 155,4

(c) La valeur espérée VEÉt de l'information apportée par le focus group est de 2 300 $:

(Gain net dû au groupe) = 99,0 – 89,9 = 0,1

VEÉt = (Gain net) + (Coût de l'étude) = 0,1 + 2,2 = 2,3.

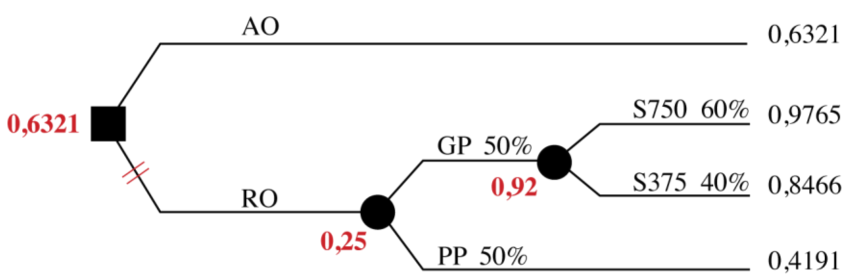
(d) Comme le montre la figure ci-dessous, la décision d'organiser le focus group est maintenue pour toutes les valeurs considérées du paramètre PrixV, sauf pour PrixV = 43. Une analyse plus fine indique que la décision est remise en question seulement quand le prix de vente est entre 42,79 $ et 43,17 $.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 7 | [redacted] | NÉ | Ét | Décision |
| 8 | Prix | 98,9 | 99,0 | Ét |
| 9 | 42 | 81,8 | 81,8 | Ét |
| 10 | 43 | 87,5 | 87,5 | NÉ |
| 11 | 44 | 93,2 | 93,2 | Ét |
| 12 | 45 | 98,9 | 99,0 | Ét |
| 13 | 46 | 104,6 | 104,7 | Ét |
| 14 | 47 | 110,3 | 110,5 | Ét |
| 15 | 48 | 116,0 | 116,3 | Ét |

**Section 9.7 La notion d'utilité**

**1. L'expert riscophobe.**

(a) L'arbre de décision ci-dessous représente le problème de l'expert lorsque les résultats sont exprimés en termes d'utilités. (Le détail des calculs se trouve dans la feuille 9.7.1 du fichier Expert.xlsx, qui est disponible sur le site). On constate que, pour $R$ = 200, la meilleure stratégie consiste à accepter l'offre.



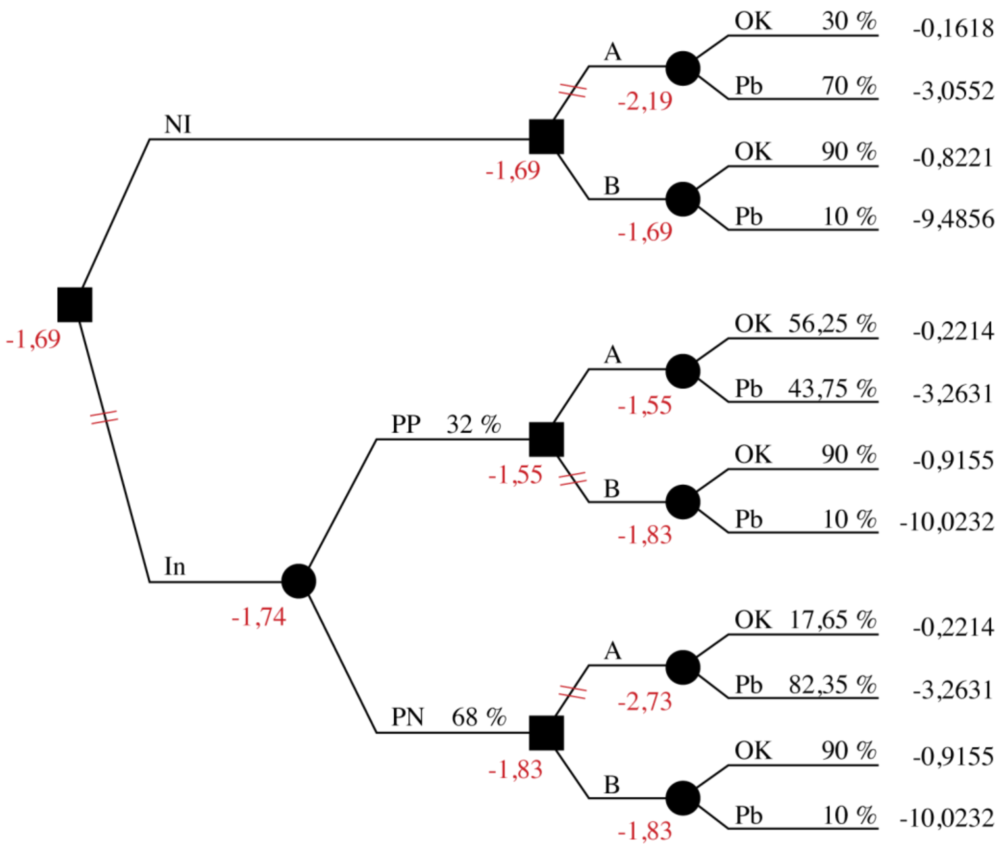

(b) Il suffit d'effectuer une analyse de sensibilité sur le paramètre $R$. Les deux tableaux ci-dessous, obtenus à l'aide de la commande Table de données… d'Excel, indiquent que, pour l'expert, la meilleure stratégie subjectivement est d'accepter l'offre en autant que son facteur de risque *R* soit inférieur à 932 milliers de dollars.

| Option | AO | RO | Décision |
|---|---|---|---|
| Facteur de risque *R* | 0,1813 | 0,1846 | RO |
| 200 | 0,6321 | 0,2527 | AO |
| 300 | 0,4866 | 0,2867 | AO |
| 400 | 0,3935 | 0,2800 | AO |
| 500 | 0,3297 | 0,2635 | AO |
| 600 | 0,2835 | 0,2451 | AO |
| 700 | 0,2485 | 0,2276 | AO |
| 800 | 0,2212 | 0,2116 | AO |
| 900 | 0,1993 | 0,1973 | AO |
| 1000 | 0,1813 | 0,1846 | RO |
| 1100 | 0,1662 | 0,1732 | RO |
| 1200 | 0,1535 | 0,1631 | RO |

| Option | AO | RO | Décision |
|---|---|---|---|
| Facteur de risque *R* | 0,1813 | 0,1846 | RO |
| 930 | 0,1935 | 0,1933 | AO |
| 931 | 0,1933 | 0,1932 | AO |
| 932 | 0,1931 | 0,1931 | AO |
| 933 | 0,1929 | 0,1930 | RO |
| 934 | 0,1928 | 0,1928 | RO |
| 935 | 0,1926 | 0,1927 | RO |
| 936 | 0,1924 | 0,1926 | RO |
| 937 | 0,1922 | 0,1924 | RO |
| 938 | 0,1920 | 0,1923 | RO |
| 939 | 0,1918 | 0,1922 | RO |
| 940 | 0,1917 | 0,1921 | RO |

2. **Les hésitations du camelot**.

L'arbre de décision ci-dessous représente le problème du camelot lorsque les résultats sont exprimés en termes d'utilités. (Le détail des calculs se trouve dans la feuille 9.7.2 du fichier Camelot.xlsx, qui est disponible sur le site). On constate que, pour $R$ = 2 000, la meilleure stratégie consiste encore à ne pas faire d'inspection et à acheter la voiture B.




**Note 1**. Dans l'exercice de révision 1 de la section 9.6, on peut calculer les résultats conditionnels comme l'un ou l'autre des écarts $r - c$ et $c - r$, où $r$ et $c$ représentent respectivement les revenus et les coûts associés à la feuille considérée. Mais, quelle que soit l'approche retenue, la stratégie optimale est la même et l'équivalent-certain à la racine prend la même valeur (au signe près évidemment). Ainsi, lorsqu'on applique le critère de Bayes dans un problème où les résultats sont exprimés en unités monétaires, on peut indifféremment maximiser le revenu net espéré ou minimiser le coût espéré.

Cependant, cette liberté n'existe plus dans un contexte où l'on recourt aux utilités. Prenons, à titre d'exemple, le nœud NI – B : l'équivalent-certain correspond à un revenu de –1977,94 $ quand on calcule les utilités à partir des revenus nets

$$0{,}9\ U(-1200) + 0{,}1\ U(-4700) \ = \ -1{,}6885 \ = \ U(-1977{,}94)$$

et à un coût de 2265,85 $ quand on cherche à associer une utilité à un coût noté positivement

$$0{,}9\ U(1200) + 0{,}1\ U(4700) \ = \ 0{,}4965 \ = \ U(1372{,}47).$$

**Note 2**. La décision reste la même, que les résultats soient exprimés en unités monétaires ou en utilités. C’est que notre camelot n’est pas suffisamment riscophobe pour que la décision bascule. Mais l’écart entre les options d’inspecter ou non la voiture A s’est rétréci. Dans le contexte du critère de Bayes, l’écart s’élevait à 50 dollars :

$$\text{Écart} \ = \ \text{ÉC(In)} - \text{ÉC(NI)} \ = \ 1\,600 - 1\,550 \ = \ 50.$$

Ici, il n’est que de 36,94 dollars :

$$\text{Écart} \ = \ \text{ÉC(NI)} - \text{ÉC(In)} \ = \ 2\,014{,}88 - 1\,977{,}94 \ = \ 36{,}94.$$

Les deux équivalents-certains sont obtenus en transformant en unités monétaires les valeurs espérées exprimées en utilités : par exemple,

$$-1{,}6885 \;=\; U(\text{ÉC(NI)}) \;= 1 - e^{\,\text{ÉC(NI)}\,/\,2000}$$

$$\text{ÉC(NI)} \;=\; 2\,000\; ln(1 + 1{,}6885) \;= 1\,977{,}94.$$