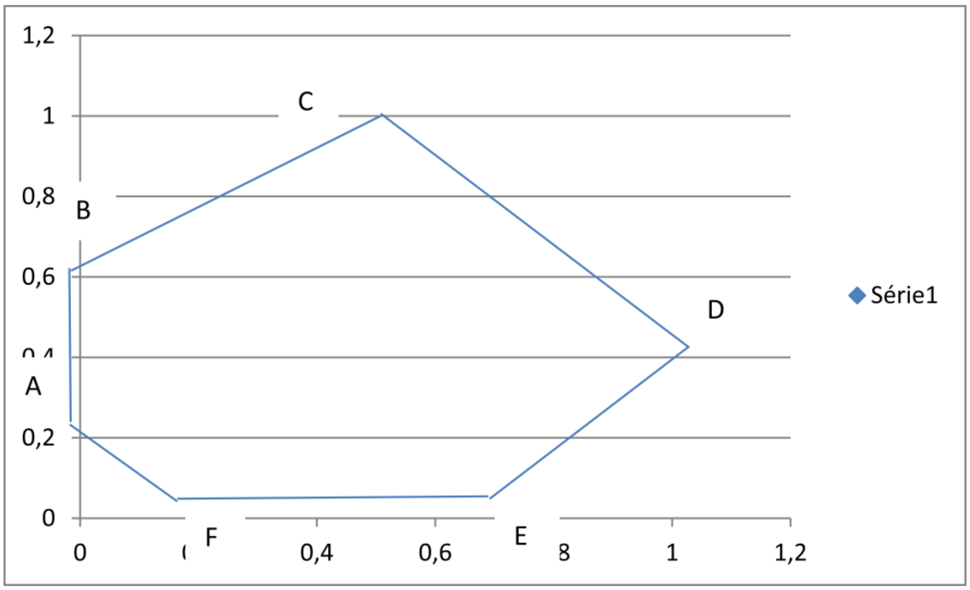
Chapitre 6 – Solutions des exercices de révision

Section 6.2 La compagnie Leurres Magiques

1. Optimums de Pareto et problèmes de maximisation.

(a) La figure suivante illustre l'ensemble ADM des solutions admissibles des contraintes (1) à (5).



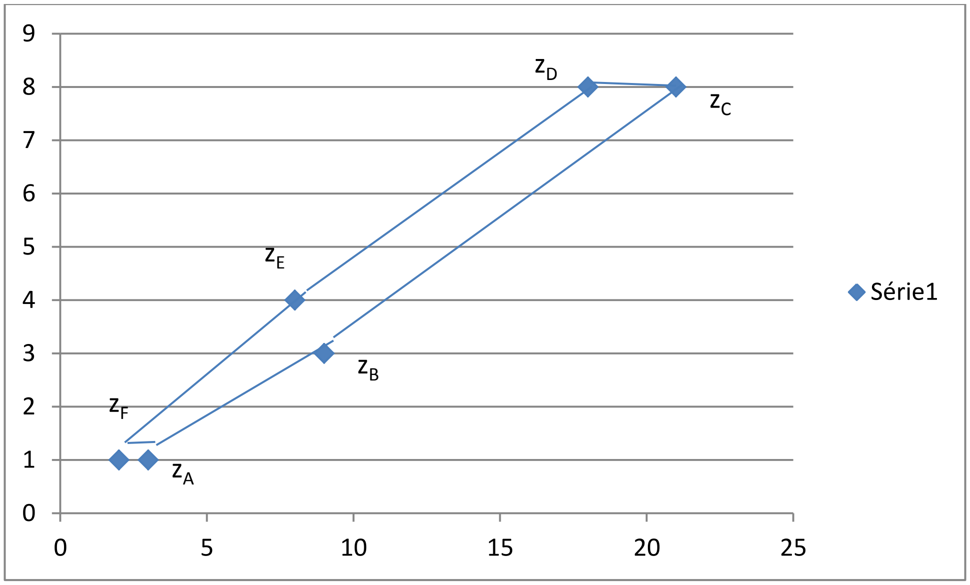
(b) Les coordonnées des points extrêmes de ADM sont données au tableau suivant.

Point extrême	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Coordonnées	(0; 1)	(0; 3)	(3; 5)	(6; 2)	(4; 0)	(1; 0)

(c) Le tableau suivant indique les valeurs prises par les fonctions-objectifs z_1 et z_2 en chacun des points extrêmes de l'ensemble ADM.

Point extrême	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
z_1	3	9	21	18	8	2
z_2	1	3	8	8	4	1

L'ensemble EVO des valeurs de z_1 et z_2 pour les solutions de ADM est illustré ci-après.



(d) Le point C est l'unique optimum de Pareto.

2. Optimums de Pareto et problèmes de minimisation.

Le point F est l'unique optimum de Pareto dans un contexte de minimisation.

3. La méthode hiérarchique.

(a) Le point C = (3; 5) est l'unique point où la fonction-objectif z_1 atteint sa valeur maximale $z_1^* = 21$ (voir exercice 1(c)). Il restera évidemment l'unique solution optimale lorsqu'on ajoute au modèle la contrainte supplémentaire « $z_1 = 21$ » et que l'on cherche à maximiser z_2.

(b) La valeur maximale $z_2^* = 8$ est atteinte aux sommets C et D (voir exercice 1(c)). Toutefois, seul C maximise z_1 lorsque z_2 est fixée à la valeur 8.

En conclusion, quel que soit l'ordre suivi, la méthode hiérarchique conduit au point C comme unique solution optimale. Ceci n'est pas surprenant, car C est l'unique optimum de Pareto.

4. La méthode de pondération.

(a) La fonction-objectif z s'écrit :

$$z = [\,2\,x_1 + 3\,x_2\,] + w\,[\,x_1 + x_2\,] = (2 + w)\,x_1 + (3 + w)\,x_2.$$

(b) Lorsque $w = 3$, $z = 5\,x_1 + 6\,x_2$ et la fonction-objectif z atteint sa valeur maximale 45 au point $(x_1\,;\,x_2) = (3;\,5)$.

5. La méthode hiérarchique et Leurres magiques.

(a) La valeur maximale de z_1 est 10 000 et (10; 30) est une solution optimale. Quand on ajoute la contrainte « $z_1 = 10\,000$ » et qu'on maximise z_3, la solution (10; 30) s'avère encore optimale et z_3 prend la valeur 370. Enfin, si l'on maximise z_2 en présence des contraintes additionnelles « $z_1 = 10\,000$ » et « $z_3 = 370$ », on obtient de nouveau (10; 30) comme optimum et z_2 prend la valeur 1 500.

(b) La valeur maximale de z_2 est 2 100 et (30; 10) est une solution optimale. Si l'on maximise z_3 tout en imposant la contrainte « $z_2 = 2\,100$ », z_3 prend la valeur 430 et l'on obtient (25; 20) comme optimale. Enfin, si l'on maximise z_1 avec les contraintes additionnelles « $z_2 = 2\,100$ » et « $z_3 = 430$ », on obtient de nouveau (25; 20) comme optimum et z_1 prend la valeur 8 500.

6. La méthode de pondération et Leurres magiques.

(a) La fonction-objectif z s'écrit :

$$\begin{aligned} z &= [100\, x_1 + 300\, x_2] + w_2\, [60\, x_1 + 30\, x_2] + w_3\, [10\, x_1 + 9\, x_2] \\ &= (100 + 60\, w_2 + 10\, w_3)\, x_1 + (300 + 30\, w_2 + 9\, w_3)\, x_2. \end{aligned}$$

(b) Lorsque $w_2 = 2$ et $w_3 = 4$, $z = 260\, x_1 + 396\, x_2$ et la fonction-objectif z atteint sa valeur maximale 14 480 au point $(x_1\,;\, x_2) = (10; 30)$.

Section 6.3 La société TransAmérica

1. La méthode de pondération et TransAmérica.

(a) La fonction-objectif z s'écrit :

$$\begin{aligned} z &= [\,760\, v_1 + \ldots + 1175\, v_8\,] + w_{\mathrm{In}}\, [\,81\, w_{11} + \ldots + 73\, w_{58}\,] + w_{\mathrm{PE}}\, [\,96\, v_1 + \ldots + 156\, v_8\,] \\ &= (760 + 96 w_{\mathrm{PE}})\, v_1 + \ldots + (1175 + 156 w_{\mathrm{PE}})\, v_8 + (81 w_{\mathrm{In}})\, w_{11} + \ldots + (73 w_{\mathrm{In}})\, w_{58}\,. \end{aligned}$$

(b) Voici une solution optimale obtenue lorsque l'on pose $w_{\mathrm{In}} = -8$ et $w_{\mathrm{PE}} = 10$.

Affectations optimales	**Voyages non effectués**	***z***
C1-V2, C2-V7, C3-V8, C4-V5, C5-V4	V1, V3, V6	11 285

2. La méthode d'optimisation par objectifs et TransAmérica.

(a) La fonction-objectif s'écrit :

$$z = 0\, d_{\mathrm{In}}^{-} + 1\, d_{\mathrm{In}}^{+} + 4\, d_{\mathrm{Pr}}^{-} + 0\, d_{\mathrm{Pr}}^{+} + 9\, d_{\mathrm{PE}}^{-} + 0\, d_{\mathrm{PE}}^{+} = d_{\mathrm{In}}^{+} + 4\, d_{\mathrm{Pr}}^{-} + 9\, d_{\mathrm{PE}}^{-}.$$

Les affectations suivantes constituent une solution optimale : C1–V2, C2–V7, C3–V8, C4–V5 et C5–V4. Si cette solution est implantée, les voyages V1, V3 et V6 ne seront pas effectués. Enfin, le tableau ci-dessous donne les valeurs atteintes pour chacun des trois critères, ainsi que les déviations, dans le cas où TransAmérica retient cette liste d'affectations des chauffeurs.

Critère	Cible	Valeur atteinte	d^-	d^+
Insatisfaction	250	245	5	0
Profit	5 600	5 685	0	85
Pénalités évitées	765	756	9	0

La fonction-objectif prend alors la valeur 81 :

$$z = 0 + (4 \times 0) + (9 \times 9) = 81.$$

(b) La fonction-objectif s'écrit :

$$z = M\,D_{\text{max}} + d_{\text{In}}^- + d_{\text{In}}^+ + d_{\text{Pr}}^- + d_{\text{Pr}}^+ + d_{\text{PE}}^- + d_{\text{PE}}^+.$$

Les affectations suivantes constituent une solution optimale obtenue en posant $M = 1000$ dans la fonction-objectif : C1–V3, C2–V7, C3–V8, C4–V5 et C5–V4. Si cette solution est implantée, les voyages V1, V4 et V6 ne seront pas effectués. Enfin, le tableau ci-dessous donne les valeurs atteintes pour chacun des trois critères, ainsi que les déviations, dans le cas où TransAmérica retient cette liste d'affectations des chauffeurs.

Critère	Cible	Valeur atteinte	d^-	d^+
Insatisfaction	250	263	0	13
Profit	5 600	5 555	45	0
Pénalités évitées	765	768	0	3

(c) Les solutions optimales obtenues en (a) et en (b) se ressemblent, seuls les chauffeurs se voient attribuer un voyage différent. La fonction-objectif de (b) attribue un poids relatif moindre au critère de profit, ce qui rend plus attrayante une solution où $d^- = 45$.

(d) La pénalité imposée à un écart par rapport à la cible doit être nulle lorsque donner une valeur positive à la variable de déviation associée procure un avantage au gestionnaire. Ainsi, on a attribué une pénalité nulle à la déviation positive par rapport à la valeur cible du profit, car la direction de TransAmérica verrait sûrement d'un bon œil que le profit dépasse la cible qu'elle acceptée. Un raisonnement analogue s'applique au critère des pénalités évitées. Mais, comme on cherche à minimiser l'insatisfaction, c'est plutôt la déviation négative qui ne sera pas pénalisée.