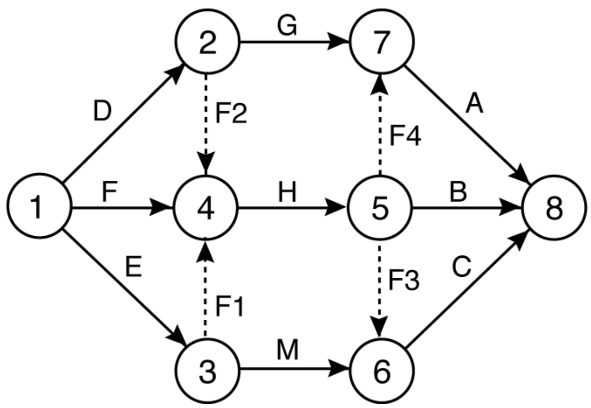
Chapitre 7 – Solutions des exercices de révision

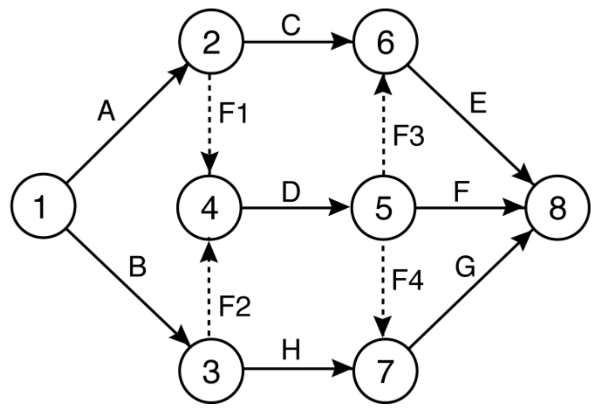
Section 7.2 La construction du réseau

1. Construction du réseau représentant un projet.

La figure de gauche ci-dessous donne un réseau qui représente le projet décrit dans l'énoncé.



Réseau de ExRév72-1



Réseau de ExRév72-2

2. Autre projet et autre réseau.

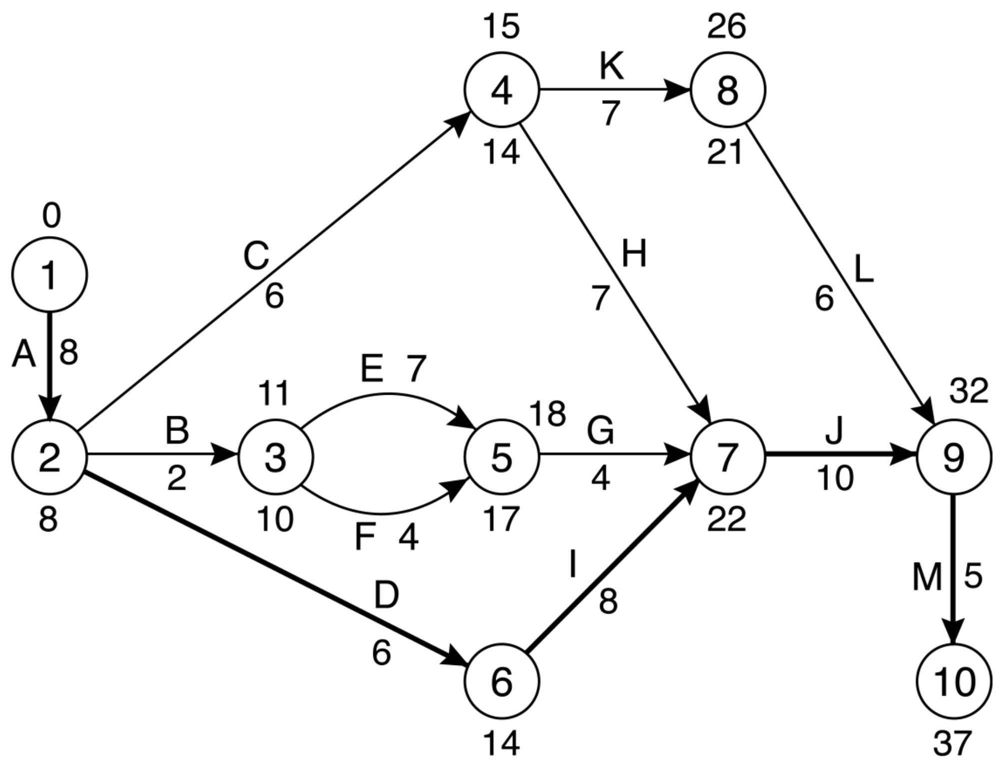
La figure de droite ci-dessus donne un réseau qui représente le projet décrit dans l'énoncé.

Section 7.3 La durée minimale d'un projet et le chemin critique

1. Réseau-1.

(a) Le réseau est représenté à la page suivante. (Le moment au plus tôt E(s) et, lorsqu'il diffère, le moment au plus tard L(s) de chaque étape s ont été reportés sur le réseau, afin d'illustrer les calculs requis pour répondre aux questions subséquentes.).

(b) La durée minimale du projet est 37 jours.



(c) Les marges sont données dans le tableau ci-dessous. Rappelons que la marge d'une tâche $t : s \to s'$ se calcule comme suit :

$$\text{marge de } t \; = \; \mathrm{L}(s') - \mathrm{E}(s) - (\text{durée de } t).$$

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Marge	0	1	1	0	1	4	1	1	0	0	5	5	0

Il existe un seul chemin critique : A → D → I → J → M.

2. Réseau-2.

(a) Le réseau est représenté à la page suivante. (Conformément à la convention mentionnée à l'exercice 1, le moment au plus tôt E(s) et, lorsqu'il diffère, le moment au plus tard L(s) de l'étape s ont été reportés sur le réseau.)

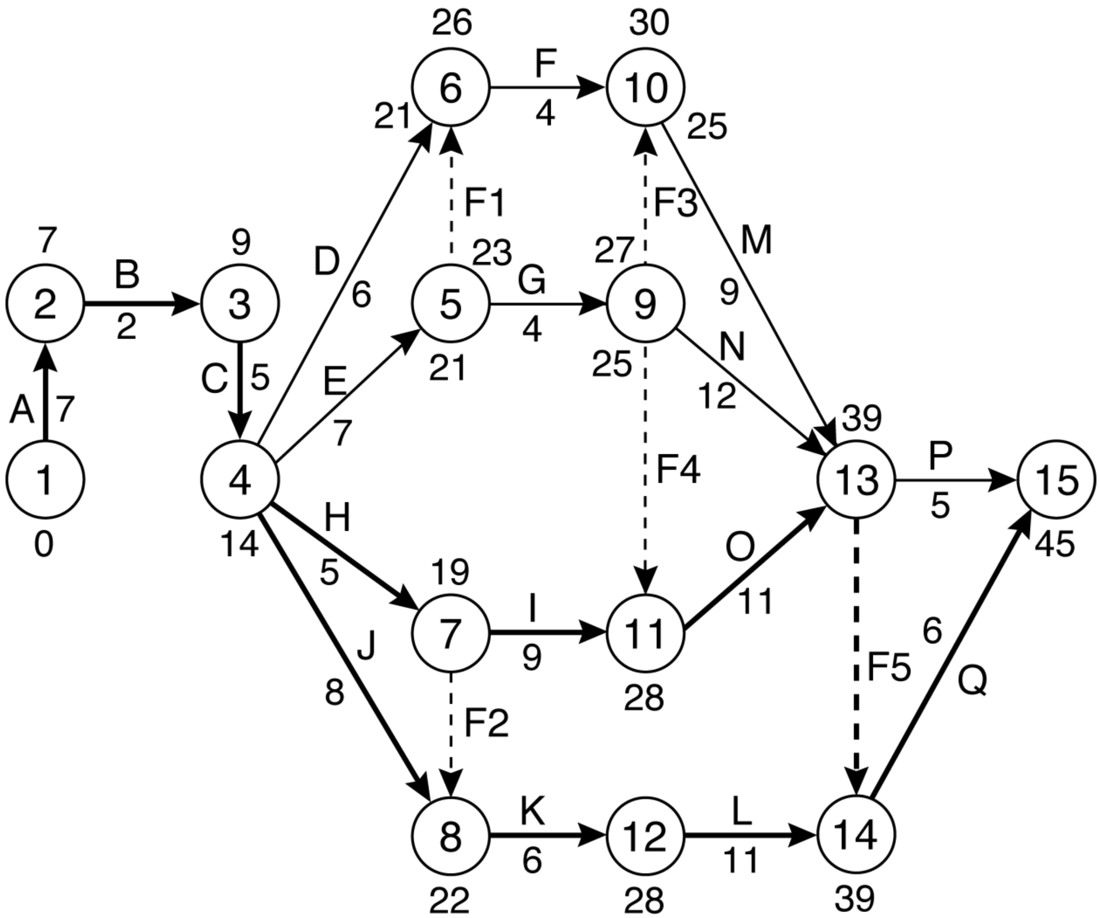
(b) La durée minimale du projet est 45 jours.

(c) Les marges sont données dans le tableau ci-dessous.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	F1	F2	F3	F4	F5
Marge	0	0	0	6	2	5	2	0	0	0	0	0	5	2	0	1	0	5	3	5	3	0

Il existe deux chemins critiques :

A → B → C → J → K → L → Q et A → B → C → H → I → O → F5 → Q.



3. Réseau-3.

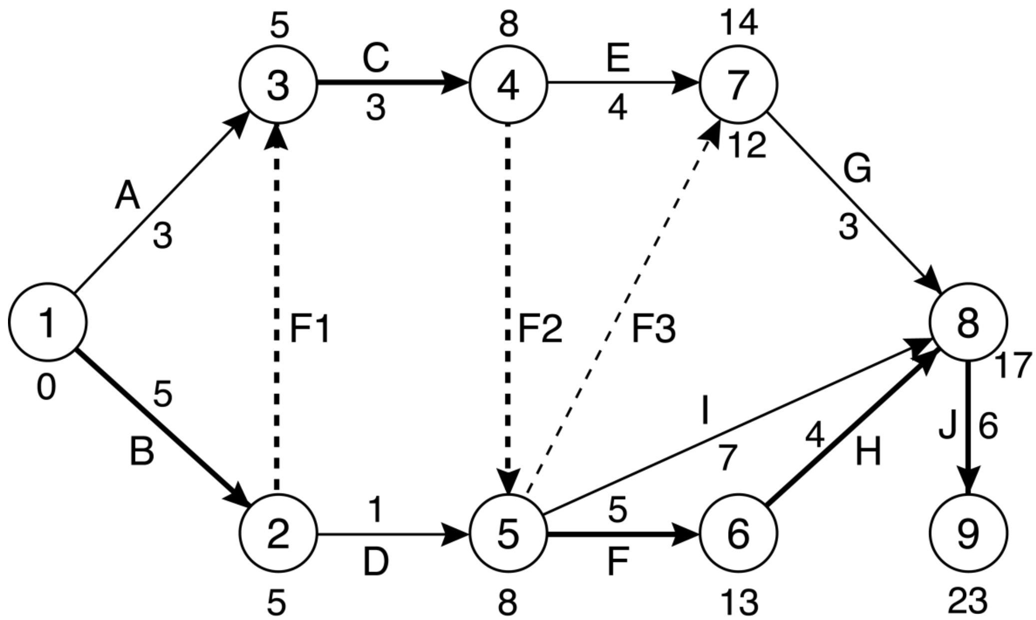
(a) Le réseau est représenté à la page suivante. (Conformément à la convention mentionnée à l'exercice 1, le moment au plus tôt E(*s*) et, lorsqu'il diffère, le moment au plus tard L(*s*) de l'étape *s* ont été reportés sur le réseau.)

(b) La durée minimale du projet est 23 semaines.

(c) Les marges sont données dans le tableau ci-dessous.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	F1	F2	F3
Marge	2	0	0	2	2	0	2	0	2	0	0	0	6

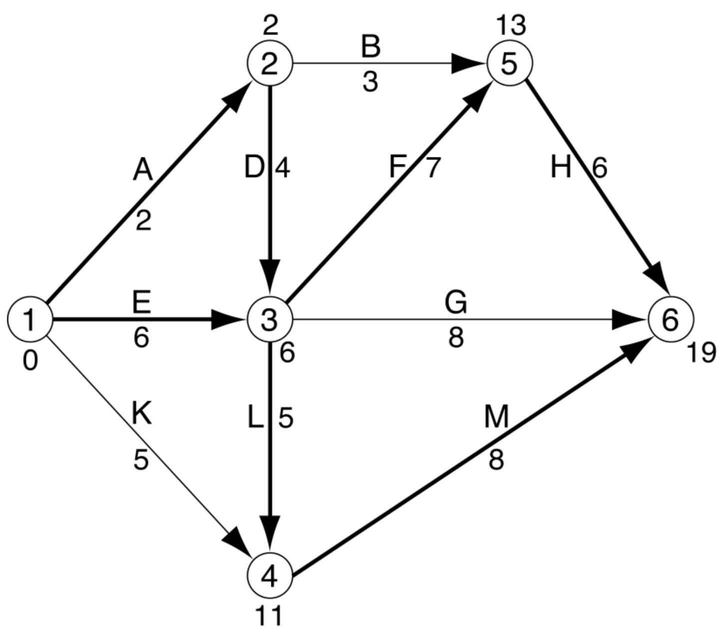
Il existe un seul chemin critique : B → F1 → C → F2 → F → H → J.



Section 7.4 La compression de la durée d'un projet

1. CPM.

(a) Tel que l'indique la figure ci-dessous, la durée minimale du projet est de 19 périodes.



Note. Les moments au plus tôt et au plus tard de tous les sommets sont égaux. Cependant, les tâches B, G et K ont une marge non nulle et ne sont pas critiques.

(b) Il existe 4 chemins critiques :

A → D → F → H et A → D → L → M et E → F → H et E → L → M.

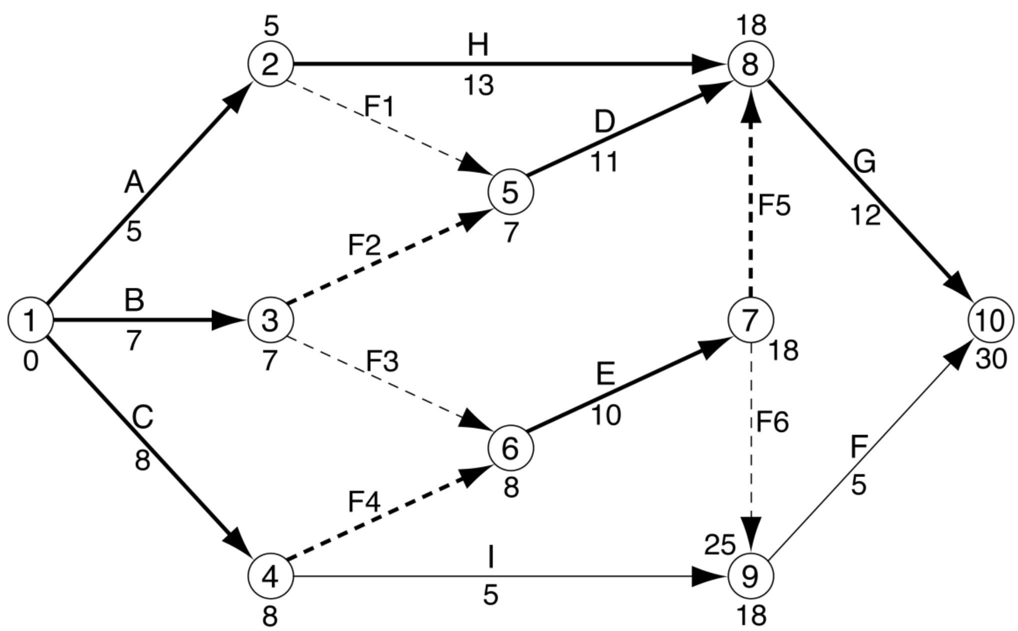
(c) Comme les tâches B et K ne sont pas critiques, il est inutile de dépenser pour les accélérer.

(d) C'est inutile car la durée minimale du projet restera à 19 périodes puisque les 2^e et 4^e chemins critiques de la question 2, qui ne contiennent pas H, conserveront une longueur de 19 périodes.

(e) Ce déplacement de personnel permettra de réduire de 1 période la durée minimale du projet.

2. CPM et conditions logiques.

(a) La figure ci-dessous représente le projet, dont la durée minimale est de 30 périodes.



(b) Le tableau suivant donne les marges des différentes tâches.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Marge	0	0	0	0	0	7	0	0	12	2	0	1	0	0	7

(c) Le projet admet 3 chemins critiques :

A → H → G et B → F2 → D → G et C → F4 → E → F5 → G.

(d) On utilise un modèle linéaire dont les variables de décision sont définies de la façon suivante :

x_s = moment où l'étape s est atteinte
Acc_t = réduction (en jours) de la durée de la tâche t grâce à l'accélération

où t = B, C, D, E, F, G, H, I. L'objectif consiste à minimiser le coût z d'accélération, où

$$z = 17\ \text{Acc}_B + 15\ \text{Acc}_C + 12\ \text{Acc}_D + 16\ \text{Acc}_E + 12\ \text{Acc}_F + 27\ \text{Acc}_G + 23\ \text{Acc}_H + 9\ \text{Acc}_I\,.$$

Voici les contraintes technologiques de ce modèle.

Fin Projet	$x_{10} \le 27$
Durée A	$-x_1 + x_2 \ge 5$
Durée B	$-x_1 + x_3 + \text{Acc}_B \ge 7$
Durée C	$-x_1 + x_4 + \text{Acc}_C \ge 8$
Durée D	$-x_5 + x_8 + \text{Acc}_D \ge 11$
Durée E	$-x_6 + x_7 + \text{Acc}_E \ge 10$
Durée F	$-x_9 + x_{10} + \text{Acc}_F \ge 5$
Durée G	$-x_8 + x_{10} + \text{Acc}_G \ge 12$
Durée H	$-x_2 + x_8 + \text{Acc}_H \ge 13$
Durée I	$-x_4 + x_9 + \text{Acc}_I \ge 5$
Durée F1	$-x_2 + x_5 \ge 0$
Durée F2	$-x_3 + x_5 \ge 0$
Durée F3	$-x_3 + x_6 \ge 0$
Durée F4	$-x_4 + x_6 \ge 0$
Durée F5	$-x_7 + x_8 \ge 0$
Durée F6	$-x_7 + x_9 \ge 0$
MaxAccél B	$\text{Acc}_B \le 2$
MaxAccél C	$\text{Acc}_C \le 3$
MaxAccél D	$\text{Acc}_D \le 3$
MaxAccél E	$\text{Acc}_E \le 2$
MaxAccél F	$\text{Acc}_F \le 1$
MaxAccél G	$\text{Acc}_G \le 2$
MaxAccél H	$\text{Acc}_H \le 4$
MaxAccél I	$\text{Acc}_I \le 1.$

Note. Une solution optimale consiste à accélérer les tâches C, D et H de 1 période et G de 2 périodes Les coûts d'accélération sont alors de 104.

On introduit, pour les questions (e) à (h), des variables binaires v_t :

$$v_t = 1 \quad \text{si la tâche } t \text{ est accélérée.}$$

Et on ajoute au modèle les contraintes technologiques suivantes :

$$v_t \leq \text{Acc}_t \leq a_t\, v_t$$

où a_t est la différence entre la durée accélérée et la durée normale de la tâche t. Par exemple, les contraintes associées aux tâches B et C prennent la forme :

$$v_B \leq \text{Acc}_B \leq 2\, v_B \quad \text{et} \quad v_C \leq \text{Acc}_C \leq 3\, v_C.$$

(e) $v_B + v_C \leq 1$

(f) $2\, v_B + v_C + v_D \leq 2$

(g) $2\, v_H \leq \text{Acc}_H \leq 4\, v_H$

(h) On introduit une variable binaire w définie ainsi :

$$w = 1 \quad \text{si on réduit G de 10 à 7 périodes.}$$

La fonction-objectif z contiendra un terme en w :

$$z = 17\, \text{Acc}_B + \ldots + 9\, \text{Acc}_I + 85\, w.$$

La contrainte « Durée G » prendra la forme :

$$-x_8 + x_{10} + \text{Acc}_G + 3\, w \geq 12\,.$$

Enfin, on ajoute une contrainte pour forcer Acc_G à prendre sa valeur maximale avant que w puisse ne pas être nulle :

$$\text{Acc}_G \geq 2\, w.$$

Section 7.5 La méthode *PERT*: durée aléatoire des tâches

1. PERT-1.

(a) La durée espérée d'une tâche est égale à $\mu = (opt + 4m + pess) / 6$.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
μ	8	2,17	6	5,83	7	4,17	4	7,17	8	11,17	7	6	5,5

(b) Le réseau est identique à celui de l'exercice 1 de la section 7.3, seuls changent les durées des tâches et les moments des sommets. Le tableau ci-dessous donne les moments espérés au plus tôt et au plus tard des 10 sommets du réseau. La durée espérée minimale du projet est de 38,5 jours.

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E(s)	0	8	10,17	14	17,17	13,83	21,83	21	33	38,5
L(s)	0	8	10,83	14,67	17,83	13,83	21,83	27	33	38,5

(c) Les marges des différentes tâches sont données ci-dessous. L'unique chemin critique est A → D → I → J → M.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
μ	0	0,67	0,67	0	0,67	3,50	0,67	0,67	0	0	6	6	0

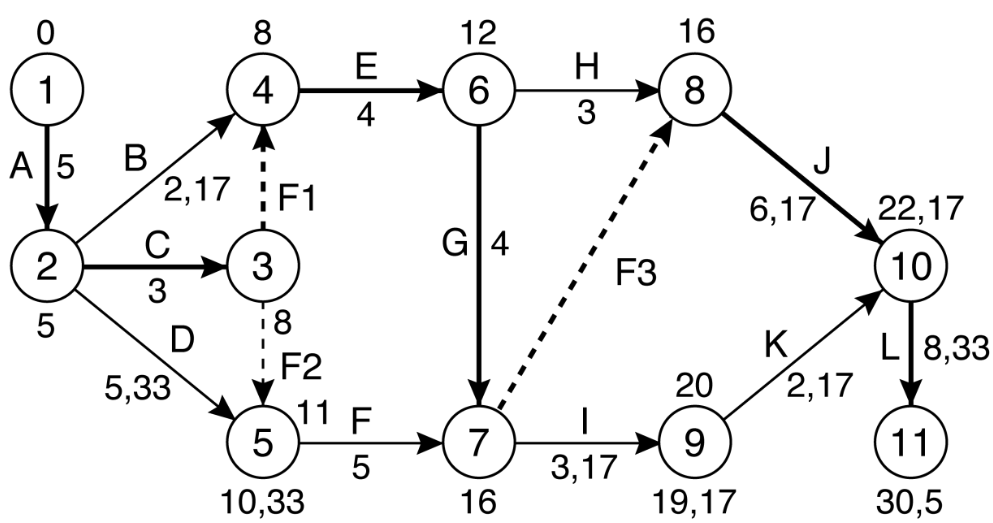
2. PERT-2.

(a) La durée espérée μ et l'écart type σ d'une tâche sont donnés par les formules suivantes :

$$\mu = \frac{opt + 4m + pess}{6} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{pess - opt}{6}.$$

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
μ	5	2,17	3	5,33	4	5	4	3	3,17	6,17	2,17	8,33
σ	0,33	0,17	0	0,67	0,33	0,67	0,33	0,33	0,50	1,17	0,17	1,33

(b) Le réseau est représenté ci-dessous. (Conformément à la convention mentionnée à l'exercice 1 de la section 7.3, le moment espéré au plus tôt E(s) et, lorsqu'il diffère, le moment espéré au plus tard L(s) de l'étape s ont été reportés sur le réseau.) La durée espérée minimale du projet est de 30,5 périodes.



(c) L'unique chemin critique est A → C → F1 → E → G → F3 → J → L. Notons D_t, la variable aléatoire « durée de la tâche t » et D, la variable « longueur du chemin critique ». Alors

$$
\begin{aligned}
E(D) &= E(D_A) + E(D_C) + E(D_{F1}) + E(D_E) + E(D_G) + E(D_{F3}) + E(D_J) + E(D_L) \\
&= 5 + 3 + 0 + 4 + 4 + 0 + 6{,}167 + 8{,}333 \\
&= 30{,}5 \\
\mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(D_A) + \mathrm{Var}(D_C) + \mathrm{Var}(D_{F1}) + \mathrm{Var}(D_E) + \mathrm{Var}(D_G) + \mathrm{Var}(D_{F3}) + \mathrm{Var}(D_J) + \mathrm{Var}(D_L) \\
&= 0{,}333^2 + 0 + 0 + 0{,}333^2 + 0{,}333^2 + 0 + 1{,}167^2 + 1{,}333^2 \\
&= 3{,}4722 \\
\sigma_D &= \sqrt{3{,}4722} = 1{,}8634.
\end{aligned}
$$

(d) La probabilité demandée est de 8,98% : en effet, par convention, elle est posée égale à $P(D > 33)$; et celle-ci se calcule ainsi :

$$P(D > 33) = P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} > \frac{33-30{,}5}{1{,}8634}\right) = P(Z > 1{,}3416) = 8{,}98\%.$$

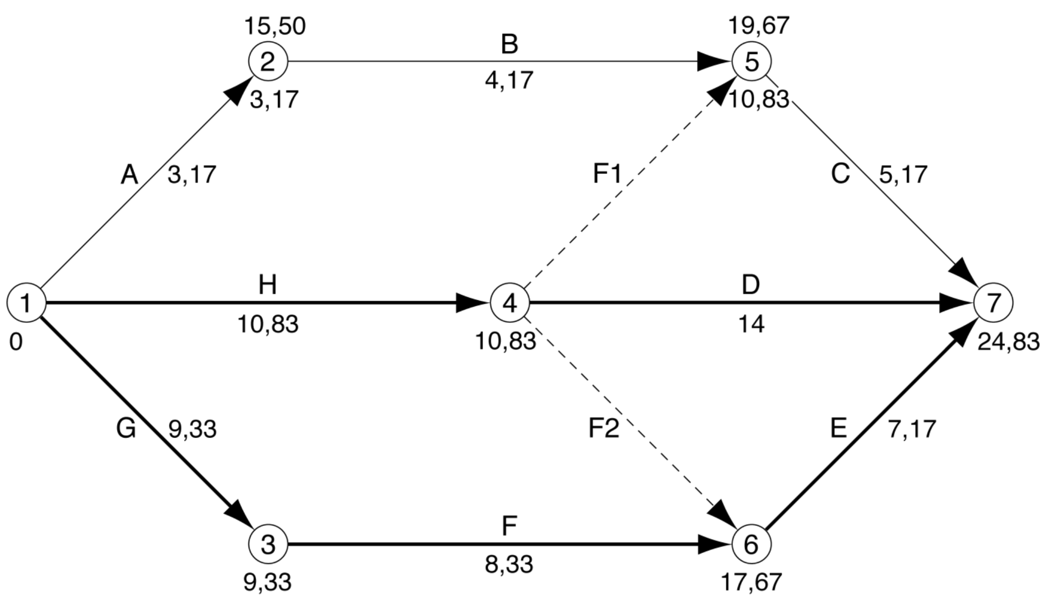
3. PERT-3.

(a) La durée espérée μ et l'écart type σ d'une tâche sont donnés par les formules suivantes :

$$\mu = \frac{opt + 4m + pess}{6} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{pess - opt}{6}.$$

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H
μ	3,17	4,17	5,17	14	7,17	8,33	9,33	10,83
σ	0,50	0,50	0,50	0,33	0,50	0,67	0,67	0,50

(b) Un réseau est donné ci-dessous. La durée espérée minimale du projet est de 24,83 périodes.



(c) Le projet admet deux chemins critiques : $H \to D$ et $G \to F \to E$. Notons D_1 et D_2 respectivement les variables « longueur » de ces chemins critiques. Alors

$$\mu_1 = E(D_H) + E(D_D) = 10,83 + 14 = 24,83$$

$$Var(D_1) = Var(D_H) + Var(D_D) = 0,333^2 + 0,50^2 = 0,360889$$

$$\sigma_1 = \sqrt{0,360889} = 0,601$$

$$P(D_1 \geq 26) = P(\frac{D_1 - \mu_1}{\sigma_1} \geq \frac{26 - 24,833}{0,601}) = P(Z \geq 1,9418) = 2,61\%.$$

De même,

$$\mu_2 = E(D_G) + E(D_F) + E(D_E) = 9,33 + 8,33 + 7,17 = 24,83$$

$$Var(D_2) = Var(D_G) + Var(D_F) + Var(D_E) = 0,667^2 + 0,667^2 + 0,50^2 = 1,13978$$

$$\sigma_2 = \sqrt{1,13978} = 1,0676$$

$$P(D_2 \geq 26) = P(\frac{D_2 - \mu_2}{\sigma_2} \geq \frac{26 - 24,833}{1,0676}) = P(Z \geq 1,093) = 13,72\%.$$

(d) Selon la convention usuelle, seul le chemin critique dont la variance est la plus élevée est considéré dans les calculs de probabilité concernant la durée du projet. Ici, la probabilité demandée est, selon cette règle, posée égale à 13,72 %.

Note. Pour que le projet soit parachevé en 26 périodes ou plus, il suffit, entre autres, que l'un des 2 chemins critiques ait une longueur de 26 périodes ou plus. Par conséquent, la probabilité p demandée est bornée inférieurement par les probabilités calculées à la question (c) :

$$p \geq \max \{ P(D_1 \geq 26) ; P(D_2 \geq 26) \} = \max \{ 2,61 \% ; 13,72 \% \} = 13,72 \%.$$

Il est possible d'améliorer cette borne inférieure. En effet, pourvu que, comme d'habitude, les durées des tâches du projet soient supposées indépendantes, les longueurs D_1 et D_2 des deux chemins critiques sont des variables indépendantes puisque ces chemins n'ont aucune tâche en commun. Et

$$\begin{aligned} 1 - p &\leq P(\text{Durée du projet} < 26) \\ &\leq P(D_1 < 26 \text{ et } D_2 < 26) \\ &\leq P(D_1 < 26) \times P(D_2 < 26) && D_1 \text{ et } D_2 \text{ indépendantes} \\ &\leq (1 - 0,0261) \times (1 - 0,1372) \\ &\leq 0,840. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$p \geq 0,160.$$